Probabilités discrètes

I. Espace probabilisé

Soit Ω un ensemble qu'on appellera l'univers. Ses parties sont les évènements.

Une tribu sur Ω : famille $\mathfrak{F}$ de sous-ens de Ω tq : $\varnothing, \Omega \in \mathfrak{F}$, $A \in \mathfrak{F} \Rightarrow \Omega \setminus A \in \mathfrak{F}$, $(A_n)_n \in \mathfrak{F}^{\mathbb{N}} \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{F}$

$(\Omega, \mathfrak{F})$ est appelé espace probabilisable

$\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu. Si $A \subset \Omega$, $\{\varnothing, A, \overline{A}, \Omega\}$ est la tribu engendrée par A

$\forall (A_n) \in \mathfrak{F}^{\mathbb{N}}, \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{F}$ $\qquad$ $A, B \in \mathfrak{F} \Rightarrow A \setminus B \in \mathfrak{F}$

$A, B \in \mathfrak{F}$ sont dits incompatibles si $A \cap B = \varnothing$

Une probabilité sur $(\Omega, \mathfrak{F})$: $P : \mathfrak{F} \to [0,1]$ tq $P(\Omega) = 1$, et si $(A_n)_n \in \mathfrak{F}^{\mathbb{N}}$ 2 à 2 disjoints, $P(\bigcup A_n) = \sum P(A_n)$

$P(A) = 1 \Rightarrow A$ "presque sûr" $\qquad$ $P(A) = 0 \Rightarrow$ "presque impossible"

$(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ est appelé espace probabilisé $\qquad$ $P(\varnothing) = 0$

$A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$ et $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$ $\qquad$ $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Continuité séquentielle : $(A_n) \in \mathfrak{F}^{\mathbb{N}} \uparrow \Rightarrow P(\bigcup A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$ $\qquad$ $(A_n) \in \mathfrak{F}^{\mathbb{N}} \downarrow \Rightarrow P(\bigcap A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$

Sous-additivité (inégalité de Boole) : $(A_n)_n \in \mathfrak{F}^{\mathbb{N}}$ $\qquad$ $P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)$

II. Conditionnement et indépendance

$(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ espace probabilisé

$B \in \mathfrak{F}$ tq $P(B) \neq 0, A \in \mathfrak{F}$ $\qquad$ $P_B(A) = P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ est la proba conditionnelle de A sachant B

$B \in \mathfrak{F}$ tq $P(B) \neq 0$ $\qquad$ $P_B : \begin{cases} \mathfrak{F} \to [0,1] \\ A \mapsto P_B(A) \end{cases}$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathfrak{F})$

Formule de Bayes séquentielle : $P(A_1 \cap ... \cap A_n) = P(A_1)P(A_2 | A_1)...P(A_n | A_1 \cap ... \cap A_{n-1})$

Un système complet dénombrable d'évènements est une partition dénombrable de Ω :

$(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tq $\forall i \neq j, A_i \cap A_j = \varnothing$ et $\bigcup A_n = \Omega$

Loi des probas totales : $(E_n)_n$ sys complet d'evts $\Rightarrow \forall B, P(B) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(B | E_k) P(E_k)$

Marche aussi si on a seulement : (E_n) 2 à 2 disjoints tels que $P(\cup E_n) = 1$ $\qquad$ $P(A|B) = \dfrac{P(A)P(B|A)}{P(B)}$

Formule de Bayes : (E_n) sys cpt d'evt, $B \in \mathfrak{F}$ tq $P(B) \neq 0 \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}, P(E_k | B) = \dfrac{P(E_k)P(B|E_k)}{\sum_{n\in\mathbb{N}} P(E_n)P(B|E_n)}$

$A, B \in \mathfrak{F}$ sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

$(A_n)_n$ deux à deux indépendants si $\forall i \neq j, A_i$ et A_j sont indépendants

$(A_n)_n$ mutuellement ind. : $\forall I \subset \mathbb{N}$ finie, $P(\bigcap_{i \in I} A_i) = \prod_{i \in I} P(A_i)$

A, B indépendants $\Rightarrow$ Si $P(A) > 0, P(B \mid A) = P(B)$ $\quad$ A et $\overline{B}$ sont indépendants

III. Variable aléatoire discrète

E ensemble. Une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathfrak{F})$ à val dans E est une application $X : \Omega \to E$ tq :

$X(\Omega)$ fini ou dénombrable $\quad$ $\forall x \in E, X^{-1}(\{x\}) \in \mathfrak{F}$ $\quad$ On note $X^{-1}(\{x\})$ "$(X = x)$"

$X : \Omega \to E$ vad. $\quad X(\Omega) = \{x_n \mid n \in I (\subset \mathbb{N})\}, x_i \neq x_j$ $\quad$ $\forall A \subset E, X^{-1}(A) \in \mathfrak{F}$ est noté "$(X \in A)$"

$(X = x_n)_{n \in I}$ est un sys cpt d'evt

$A \in \mathfrak{F}$ $\quad 1_A : \begin{cases} \Omega \to \mathbb{R} \\ \omega \mapsto 1 \text{ si } \omega \in A, \text{ 0 sinon} \end{cases}$ est une vad, la variable aléatoire indicatrice de A

$X : \Omega \to E$ vad, $f : E \to F \Rightarrow$ $f \circ X : \omega \mapsto f(X(\omega))$ est une variable aléatoire discrète notée $f(X)$

E, F. Un couple de variables aléatoires discrètes à valeurs dans $E \times F$ est une vad $X : \Omega \to E \times F$

$X = (X_1, X_2)$ couple de vad à val dans $E \times F$. Alors X_1 (resp X_2) est une vad à val dans E (resp F)

$X_1 : \Omega \to E, X_2 : \Omega \to F$ vad. Alors $X : \omega \mapsto (X_1(\omega), X_2(\omega))$ est un couple de vad.

$X : \Omega \to E$ vad. $\mathfrak{F} = \mathcal{P}(X(\Omega))$ est une tribu sur $X(\Omega)$. La loi de probabilité P_X est la probabilité sur $(X(\Omega), \mathfrak{F})$ définie par : $P_X : A \mapsto P(X \in A)$

Deux vad X et Y sur $(E, \mathfrak{F})$ sont équiréparties (ont la même loi) si $P_X = P_Y$

Germe de proba : X vad sur Ω à val dans $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tq $\sum p_n = 1 \Rightarrow \exists P$ sur $(\Omega, \mathfrak{F})$ tq $\forall n, P(X = x_n) = p_n$

$X = (X_1, X_2)$ couple de vad. La loi conjointe de X_1 et X_2 est la loi de X, qui est entièrement déterminée par :

$X(\Omega) = X_1(\Omega) \times X_2(\Omega)$ $\quad$ $\forall x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, P(X = (x_1, x_2))$ notée $P_X(x_1, x_2)$

$X = (X_1, X_2)$ couple de vad. $X(\Omega) = \{(x_i, y_j) \mid i \in I, j \in J\}$ où $I \subset \mathbb{N}, J \subset \mathbb{N}$ et x_i et y_i deux à deux disctincts.

$\forall i \in I, P(X_1 = x_i) = \sum_{j \in J} P_X(x_i, y_j)$ $\quad$ $\forall j \in J, P(X_2 = y_j) = \sum_{i \in I} P_X(x_i, y_j)$ sont les lois marginales

Loi conjointe $\Rightarrow$ lois marginales MAIS PAS L'INVERSE

X, Y vad sur $(\Omega, \mathfrak{F}, P), x \in X(\Omega)$ tq $P(X = x) \neq 0, \mathfrak{F} = \mathcal{P}(Y(\Omega))$

$A \mapsto P(Y \in A \mid X = x)$ est une proba sur $(Y(\Omega), \mathfrak{F})$, la loi conditionnelle de Y sachant $(X = x)$

X vad réelle. $F_X : x \mapsto P(X \leq x)$ est la fonction de répartition de X

F_X est croissante, continue à droite sur $\mathbb{R}$. $\quad$ $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0, \lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

$a \leq b \in \mathbb{R} \Rightarrow P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$

X, Y vad sur Ω. X et Y sont indépendantes si $\forall x \in X(\Omega), y \in Y(\Omega), P((X = x) \cap (Y = y)) = P(X = x)P(Y = y)$

X,Y indpdts $\Leftrightarrow P_{(X,Y)}(x,y)=P_X(x)P_Y(y)$ càd loi conjointe = produit des lois marginales

X et Y vad sont indépendantes $\Leftrightarrow \forall A\subset X(\Omega), \forall B\subset Y(\Omega), P((X\in A)\cap(Y\in B))=P(X\in A)P(Y\in B)$

$X_1 ... X_n$ vad : mutuellement indpdtes si $\forall i, \forall x_i \in X_i(\Omega)$, $(X_1=x_1)...(X_n=x_n)$ sont mut. indpdts

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de vad indépendantes si $\forall I\subset\mathbb{N}$ finie non vide, les $(X_i)_{i\in I}$ sont mut. indptes

X,Y vad indpdtes. f,g def sur $X(\Omega),Y(\Omega)\Rightarrow f(X)$ et $g(Y)$ vad indpdtes

IV. Espérance et variance

X vad réelle à val dans $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a une espérance finie si $\sum x_n P(X=x_n)$ est ABSOLUMENT convergente

Dans ce cas, $E(X)=\sum_{n=0}^{+\infty} x_n P(X=x_n)$ est l'espérance de X

Une vad réelle est centrée si elle a une espérance finie telle que $E(X)=0$

X vad à val dans $\mathbb{N}$. Elle admet une espérance finie *ssi* $\sum P(X\geq n)$ cv. Dans ce cas, $E(X)=\sum_{n=1}^{+\infty} P(X\geq n)$

Thm du transfert : X vad dans $E=\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, avec $x_i\neq x_j$, $f:E\to\mathbb{R}$. $f(X)$ a une esp finie *ssi* $\sum f(x_n)P(X=x_n)$

alors $E(f(X))=\sum_{n=0}^{+\infty} f(x_n)P(X=x_n)$

X,Y vadr à esp finie, $a,b\in\mathbb{R}\Rightarrow E(aX+bY)$ existe et est égale à $aE(X)+bE(Y)$

X à val dans $\mathbb{R}^+\Rightarrow E(X)\geq 0$ $\forall\omega\in\Omega, X(\omega)\leq Y(\omega)\Rightarrow E(X)\leq E(Y)$

X,Y vadr esp finie, indépendantes $\Rightarrow E(XY)=E(X)E(Y)$

Réciproque fausse. Généralisable à n variable mut. indpdtes

X vadr tq X^2 a une esp finie ("a un moment d'ordre 2") $\Rightarrow X$ aussi,

et $V(X)=E((X-E(X))^2)\geq 0$ est la variance de X $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$ est l'écart-type de X

$V(X)=E(X^2)-E(X)^2$ $\forall a,b\in\mathbb{R}, V(aX+b)=a^2V(X)$

X vadr mmt 2, $\sigma(X)>0$. $\dfrac{X}{\sigma(X)}$ est d'écart-type, c'est la variable réduite associée à X

$\dfrac{X-E(X)}{\sigma(X)}$ est la variable centrée réduite associée à X

X,Y vadr esp finie. Si $(X-E(X))(Y-E(Y))$ admet une esp finie,

$\operatorname{cov}(X,Y)=E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$ est la covariance de X est Y

Cauchy-Schwarz : X,Y vadr mmt 2, alors XY a une espérance finie et $E(XY)^2\leq E(X^2)E(Y^2)$

$\forall (a_n),(b_n),(p_n)$ den, $p_n\geq 0$, $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n b_n| p_n \leq \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2 p_n}\sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n^2 p_n}$

X, Y vadr mmt 2 $\Rightarrow \exists \operatorname{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

La covariance est un opérateur bilinéaire symétrique

X, Y vadr mmt 2, indpdtes $\Rightarrow \operatorname{cov}(X,Y) = 0$ ("non corrélées") RECIPROQUE FAUSSE

$$V(X_1 + \ldots + X_n) = \sum_i V(X_i) + 2\sum_{i<j} \operatorname{cov}(X_i, X_j)$$

X, Y vadr mmt 2, $\sigma(X) > 0, \sigma(Y) > 0$ $\rho(X,Y) = \dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$ est le cof de corrélation

X, Y vadr mmt 2 $|\operatorname{cov}(X,Y)| \leq \sigma(X)\sigma(Y)$ ($\Rightarrow$ si $\exists$, $|\rho(X,Y)| \leq 1$)

Inégalité de Markov : X v.a. dans $\overline{\mathbb{R}^+} \Rightarrow \forall a > 0, P(X \geq a) \leq \dfrac{E(X)}{a}$ et en particulier, $P(X \geq kE(X)) \leq \dfrac{1}{k}$

Inégalité de Bienaymé-Chebychev : X v.a. réelle : $\forall a > 0, P(|X - E(X)| \geq a) \leq \dfrac{V(X)}{a^2}$

V. Variables aléatoires à valeurs entières

X vad à val dans $\mathbb{N}$, $D = \{t \in \mathbb{R} \mid \exists E(t^X)\}$. $G_X : \begin{cases} D \to \mathbb{R} \\ t \mapsto E(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)t^n \end{cases}$ est la fonction génératrice de X

X vad$\mathbb{N}$ Le rayon de CV de $\sum P(X=n)t^n$ est ≥ 1. $\forall |t| \leq 1, \exists E(t^X)$

X vad$\mathbb{N}$. $\forall k \in \mathbb{N}, P(X=k) = \dfrac{G_X^{(k)}(0)}{k!}$ $\exists E(X) \Leftrightarrow G_X$ dérivable en 1, alors $E(X) = G_X'(1)$

$\exists V(X) \Leftrightarrow G_X$ deux fois dérivable en 1, alors $G_X''(1) = E(X(X-1))$ et $V(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - G_X'(1)^2$

$G_X = G_Y \Rightarrow$ même loi de proba

X, Y vad$\mathbb{N}$ INDEPENDANTES $\Rightarrow G_{X+Y} = G_X G_Y$ (généralisable à n mut indpdtes)

VI. Lois usuelles

1. Loi géométrique

Loi géométrique : succession d'épreuves de Bernouilli (pile ou face) iid., premier succès ?

X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$ $(X \sim \mathcal{G}(p))$ si $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X=k) = p(1-p)^{k-1}$

X vad loi géom p. Rayon de G_X : $R = \dfrac{1}{1-p} > 1$ $G_X(t) = \dfrac{pt}{1-(1-p)t}$ $E(X) = \dfrac{1}{p}$ $V(X) = \dfrac{1-p}{p^2}$

X vad$\mathbb{N}^*$. Loi géom $\Leftrightarrow \forall n, k > 0, P(X > n+k \mid X > n) = P(X > k)$ (loi sans mémoire)

2. Loi de Poisson

X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ $(X \sim \mathcal{P}(\lambda))$ si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!}$

X vad loi Poisson $\lambda > 0$ Rayon de G_X : $R = +\infty$ $G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$ $E(X) = \lambda = V(X)$

X, Y vad Poisson λ, μ indpdtes $\Rightarrow X + Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$

VII. Résultats asymptotiques

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de vad loi bin de param (n, p_n) tq $np_n \to \lambda > 0$ $\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}, \lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = k) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!}$

Loi faible des grands nombres : $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ suite de vadr 2 à 2 indpdtes, de même loi, mmt 2.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ et $m = E(X_1)$. Alors $\forall \varepsilon > 0, \lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) = 0$