Chap 38 : Intégrales multiples

I. Fubini

$f\in\mathcal{C}(I\times J,\mathbb{C})$, supp toutes les int. partielles relatives à f et $|f|$ existent,

Si $\int_I\left(\int_J|f(x,y)|dx\right)dy<+\infty$, alors $\int_J\left(\int_I|f(x,y)|dy\right)dx<+\infty$ et égalité pour f

II. Changement de variables

K compact de $\mathbb{R}^n$

$f:K\to\mathbb{R}$, φ $\mathcal{C}^1-$difféo $:U\subset\mathcal{V}(L)\to V\in\mathcal{V}(K)$, $\varphi(L)=K$

Alors $\int_K f(x_1...x_n)dx_1...dx_n=\int_L f\circ\varphi(y_1...y_n)|J_\varphi(y)|dy_1...dy_n$

$^{(I)}$Polaires : $J_\varphi(r,\theta)drd\theta=rdrd\theta$ $\quad$ φ affine : $|J_\varphi|=|\det\vec{\varphi}|$ $\quad$ Sphériques : $|J|=r^2\sin\theta$

III. Généralisation de Fubini

$\varphi,\psi\in\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ avec $\varphi\le\psi$, $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,a\le x\le b,\ \varphi(x)\le y\le\psi(x)\}$

$f\in\mathcal{C}(D,\mathbb{R})$: $\iint_D f(x,y)dxdy=\int_a^b\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}f(x,y)dydx$

Un domaine élémentaire s'écrit $D=\{(x,y)\,/\,x\in[a,b],\ \varphi(x)\le y\le\psi(x)\}=\{(x,y)\,/\,y\in[c,d],\ \alpha(y)\le x\le\beta(y)\}$

avec $\varphi,\psi,\alpha,\beta$ continus, $\varphi\le\psi$ et $\alpha\le\beta$

Green-Riemann : Soit D domaine élémentaire, Γ son bord orienté. $\int_\Gamma Pdx+Qdy=\iint_D\left(-\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial Q}{\partial x}\right)dxdy$

où Γ est $\mathcal{C}^1_{pm}$, $Pdx+Qdy$ est une $1-$forme diff., et P et Q ont des DP continues sur le domaine

$f\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ harmonique $(\Delta f=0)$, $\varphi(r)=\int_0^{2\pi}f(r\cos\theta,r\sin\theta)d\theta$ est cte de valeur $2\pi f(0,0)$

$$\left(\begin{array}{l}\text{Dériv.}\times r:\ r\varphi'(r)=\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(...)r\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial y}(...)r\sin\theta\right)d\theta \qquad P=-\frac{\partial f}{\partial y},\ Q=\frac{\partial f}{\partial x},\ dx=-r\sin\theta\\ \qquad=\int_{C(0,r)}Pdx+Qdy=\int_{\bar{D}(0,R)}\left(-\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial Q}{\partial x}\right)dxdy=\int_{\bar{D}(0,r)}\Delta f=0\end{array}\right)$$

$f(A)=\frac{1}{\pi R^2}\iint_{\bar{D}(A,R)}f$ propriété de la moyenne $\to$ Electromagnétisme