Chap 37 : Formes différentielles

I. Généralités

E $\mathbb{R}-evn$ de dim finie, E^* son dual Ω ouvert de E $(e)=(e_1...e_n)$ base de E

L'opérateur $\cdot$ signifie ici "appliqué à" : $f\cdot x = f(x)$

Une forme différentielle de degré 1 sur E est une application $\omega:\Omega\to E^*$

Elle est de classe $\mathcal{C}^p$ si elle l'est en tant qu'application de Ω dans l'evn E^*

$\Lambda_k^1(\Omega)=\{$formes diff de deg 1 de classe $\mathcal{C}^k\}$ est un espace vectoriel

$F\in\mathcal{C}^p(\Omega,\mathbb{R}), p\geq 1$ $dF: a\mapsto dF_a$ est une forme diff de classe $\mathcal{C}^{p-1}$

La base duale de (e) est alors $(dx_1...dx_n)$, différentielles des formes coords $(x_1...x_n)$ sur (e)

$x\in\Omega$. $\omega(x)\in E^*$ et si $a_1(x)...a_n(x)$ sont ses coords sur la base duale de (e), $\omega(x)=a_1(x)dx_1+...+a_n(x)dx_n$

On a aussi $\omega(x)\cdot(h_1e_1+...+h_ne_n)=h_1a_1(x)+...+h_na_n(x)$

La forme diff ω est de classe $\mathcal{C}^p$ *ssi* les fonctions $(a_1...a_n)$ le sont

II. Intégrales curvilignes

$\Gamma=([a,b],f)$ arc $\mathcal{C}^1$ de support contenu dans Ω, ω forme diff continue sur Ω.

L'intégrale curviligne de la forme diff. ω le long de l'arc Γ est : $\int_a^b \omega(f(t))\cdot f'(t)dt=\int_a^b\sum_{k=1}^n f'_k(t)a_k(f(t))dt$

On la note $\int_\Gamma\omega$, sa définition s'étend aux arcs {continus et $\mathcal{C}^1_{pm}$} (chemins $\to$ travail en physique)

L'intégrale de ω le long de Γ est invariante par $\mathcal{C}^1-reparam$ croissant de Γ,

et changée en son opposée par $\mathcal{C}^1-reparam$ décroissant

III. Formes exactes, fermées

$\omega: x\mapsto\sum_{k=1}^n a_k(x)dx_k$ forme diff $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert Ω.

ω est dite exacte s'il existe F de classe $\mathcal{C}^p, p\geq 1$ tq $dF=\omega$ F est une primitive de ω

L'intégrale d'une forme exacte $\omega=dF$ le long d'un arc $\mathcal{C}^1$ d'extrémités A et B vaut $F(B)-F(A)$

Vrai pour les arcs $\{\mathcal{C}^0$ et $\mathcal{C}^1_{pm}\}$

CN d'exactitude sur ω : $\forall x\in\Omega, i,j\in [\![1,n]\!]^2, \frac{\partial a_i}{\partial x_j}(x)=\frac{\partial a_j}{\partial x_i}(x)$. On dit alors que ω est fermée ($\leftarrow$ Schwarz)

En dim 3 euclid., BON (i,j,k) : la forme diff $Pdx+Qdy+Ddz$ est fermée *ssi* $\operatorname{rot}B=0$, où $B=Pi+Qj+Rk$

$\omega(x,y)=\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\operatorname{Im}\left(\frac{dz}{z}\right)$ forme diff sur $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$, fermée non exacte ($\int_{\text{Cercle}(O,1)}\omega=2\pi$)

L'ouvert Ω de E est étoilé s'il existe $O \in \Omega$ (point étoile) tq, $\forall M \in \Omega$, $[O,M] \subset \Omega$

Thm Poincaré : Si Ω est étoilé, ω fermée $\Rightarrow \omega$ exacte

$X \in \Omega$, $\gamma : t \mapsto tX$. On pose $f(x) = \int_0^1 \omega(tX)(X)dt = \sum_{i=1}^n \int_0^1 a_i(tx_1,\dots,tx_n)x_i dt$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^n \int_0^1 \frac{\partial a_i}{\partial x_j}(tX)tx_i dt + \int_0^1 a_j(tX)dt = \sum_{i=1}^n \int_0^1 \frac{\partial a_j}{\partial x_i}(tX)tx_i dt + \int_0^1 a_j(tX)dt$$

$$= \int_0^1 \frac{d}{dt}(a_j(tX))tdt + \int_0^1 a_j(tX)dt = (IPP) = a_j(x)$$