

Chap 36 : Quadriques

I. Généralités

$E = \mathbb{R}^3$ euclidien canonique

Une quadrique est l'ensemble des points vérifiant : $(Q) \quad \sum_{i,j \in 1,3} a_{i,j} x_i x_j + \sum_{i=1}^3 b_i x_i + c = 0$

Ce qui s'écrit aussi $XAX + LX + C = 0$ avec $A \neq 0$ et L matrice ligne

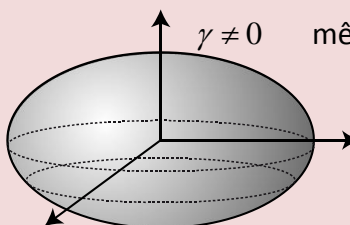
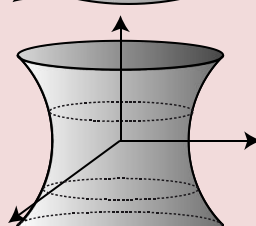
Changement de repère : $X = PY + \Omega \rightarrow$ on conserve une quadrique

Intersection avec un plan $\rightarrow \emptyset$, droite, plan ou conique

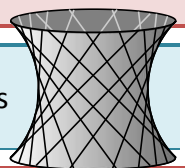
II. Réduction et classification

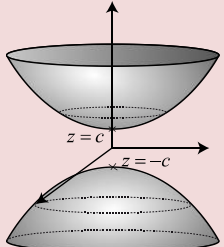
On diagonalise en BON : $\lambda x^2 + \mu y^2 + \nu z^2 + \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$ où $(\lambda, \mu, \nu) = \text{spec}(A)$

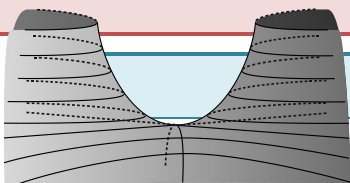
α, β, γ disparaissent par translation $\rightarrow \lambda x^2 + \mu y^2 + \nu z^2 = \gamma$

Non dégénéré : $\gamma = 0$	même signe	$\{0\}$
$(\det A \neq 0)$	signes \neq	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$ CONE de directrice elliptique (régulé)
	même signe $\frac{\lambda}{\gamma} > 0$:	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ELLIPSOÏDE
	signes \neq	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ HYPERBOLOÏDE à 1 nappe Param : $\begin{cases} x = a \cos u \cosh v \\ y = b \sin u \cosh v \\ z = c \sinh v \end{cases}$ (régulé, connexe)

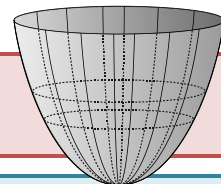
Régulé : $X^2 + Y^2 - Z^2 = 1 \rightarrow (Y-Z)(Y+Z) = (1-X)(1+X) \rightarrow \frac{Y-Z}{1-X} = \frac{1+X}{Y+Z} \Rightarrow$ droites



	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$	HYPERBOLOÏDE à 2 nappes
Nappe sup \rightarrow	Param : $\begin{cases} x = a \sinh u \cos v \\ y = b \sinh u \sin v \\ z = c \cosh u \end{cases}$	
Dégénéré $\text{rg } A = 2$	$\gamma \neq 0$ signes \neq	$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ PARABOLOÏDE HYPERBOLIQUE (régulé)



Régulé : translation $\rightarrow Z = XY \Rightarrow D_\lambda \{X = \lambda, Z = \lambda Y\}, \Delta_\mu \{Y = \mu, Z = \mu X\}$



λ, μ même signe $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ PARABOLOÏDE ELLIPTIQUE

Autres :	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$	Droite $(0,0,z)$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	Réunion de plans $\begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0 \end{cases}$
	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = c > 0$	Cylindre elliptique	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = c \neq 0$	Cylindre hyperbolique
Rang 1 :	$x^2 = z$	Cylindre parabolique	$x^2 = c \geq 0$	1 ou 2 plans parallèles

$xy + yz + zx = 1$? $M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\chi_M = -(X+1)^2(X-2) \rightarrow$ Red : Hyperboloïde à 1 nappe