Chap 35 : Courbes, nappes et surfaces

$f:U\to V$ $\mathcal{C}^1$ – difféo entre ouverts de $\mathbb{R}^n$, $\Gamma=(I,\gamma)$ arc $\mathcal{C}^1$ à valeurs dans U, t_0 point régulier de Γ
$\Rightarrow t_0$ est un point régulier de $\tilde{\Gamma}=(I,f\circ\gamma)$ est la tangente à $\tilde{\Gamma}$ en $f(\gamma(t_0))$ est dirifée par $df_{\gamma(t_0)}(\vec{\gamma}'(t_0))$

I. Fonctions implicites planes

Graphe fonctionnel $\Gamma\subset E\times F$: $\forall x,y,y'\in E\times F\times F$, $(x,y)\in\Gamma$ et $(x,y')\in\Gamma\Rightarrow y=y'$

U ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f\in\mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$, $(a,b)\in U$ où $f(a,b)=0$ $\qquad\Gamma=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ /\ f(x,y)=0\}$

Graphe fonctionnel au voisinage de (a,b) : $\exists V\in\mathcal{V}(a,b),\exists I$ int. de $\mathbb{R}$, $\varphi:I\to\mathbb{R}$
tq $(\forall(x,y)\in V, f(x,y)=0\Leftrightarrow y=\varphi(x))$ ou $(\forall(x,y)\in V, f(x,y)=0\Leftrightarrow x=\varphi(y))$

Même avec f $\mathcal{C}^\infty$, une courbe $f(x,y)=0$ peut être très complexe

Fonctions implicites : Si $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)\neq 0$, $\exists\eta>0,\varepsilon>0,\varphi\in\mathcal{C}^1(]a-\eta,a+\eta[,]b-\varepsilon,b+\varepsilon[)$

tq $\begin{cases}]a-\eta,a+\eta[\times]b-\varepsilon,b+\varepsilon[\subset U\\ \forall(x,y)\in]a-\eta,a+\eta[\times]b-\varepsilon,b+\varepsilon[, f(x,y)=0\Leftrightarrow y=\varphi(x)\end{cases}$ $\qquad$ Néc^t, $\varphi(a)=b$

Inversion locale sur $F:(x,y)\mapsto(x,f(x,y))$ $\mathcal{C}^1\Rightarrow(x,y)=G(x,0)$, on écrit $G(x,z)=(x,\varphi(x,z))$

Théorème analogue avec $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)\neq 0$ ou $\nabla f(a,b)\neq\vec{0}$

Allure aux points singuliers $\to f(x,\varphi(x))=0?\to\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\varphi'(x)=0\Rightarrow$ ED. Si f $\mathcal{C}^2$ ok

II. Nappes

$(\mathcal{E})$ rapporté à un RON $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ $\qquad$ Les coordonnées des plans tangents sont notées en majuscules

Nappe de classe $\mathcal{C}^k$: (D,F) où D ouvert de $\mathbb{R}^2$ connexe (domaine), et $F\in\mathcal{C}^k(D,\mathcal{E})$
Support : $F(D)$, points simples, multiples...

$k\geq 1\quad m=(u,v)\in D\quad\Sigma=(D,F)$

m est régulier si $\left(\dfrac{\partial\vec{F}}{\partial u}(m),\dfrac{\partial\vec{F}}{\partial v}(m)\right)$ est libre.

Le plan tangent à Σ en m est alors le plan passant par $M=F(m)$ dirigé par $\left(\dfrac{\partial\vec{F}}{\partial u}(m),\dfrac{\partial\vec{F}}{\partial v}(m)\right)$

$$^{(I)}\mathcal{T}_\Sigma(M)=M(m)+dF_m(\mathbb{R}^2)\ \to\begin{vmatrix}X-x & x'_u & x'_v\\ Y-y & y'_u & y'_v\\ Z-z & z'_u & z'_v\end{vmatrix}=0$$

Le vecteur normal de Σ en $M(u,v)$ est $\overrightarrow{N}(u,v)=\dfrac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial u}\wedge\dfrac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial v}$

M régulier $\Leftrightarrow \overrightarrow{N}(u,v)\neq\vec{0}$ et dans ce cas $P\in\mathcal{T}_\Sigma(M)\Leftrightarrow\langle\overrightarrow{MP}\,|\,\overrightarrow{N}(u,v)\rangle=0$

Aire d'une surface : $\mathcal{A}(\Sigma)=\iint_D\left\|\overrightarrow{N}(u,v)\right\|_2 dudv$

Nappes paramétrées cartésiennes

$(x,y)\in D,\ z=f(x,y)$ Paramétré par $F:(x,y)\mapsto(x,y,f(x,y))$

$\overrightarrow{N}(x,y)=\left(-\dfrac{\partial f}{\partial x},-\dfrac{\partial f}{\partial y},1\right)$ $\Rightarrow$ Points toujours réguliers

Plan tangent : $Z-z=(X-x)\dfrac{\partial f}{\partial x}+(Y-y)\dfrac{\partial f}{\partial y}$

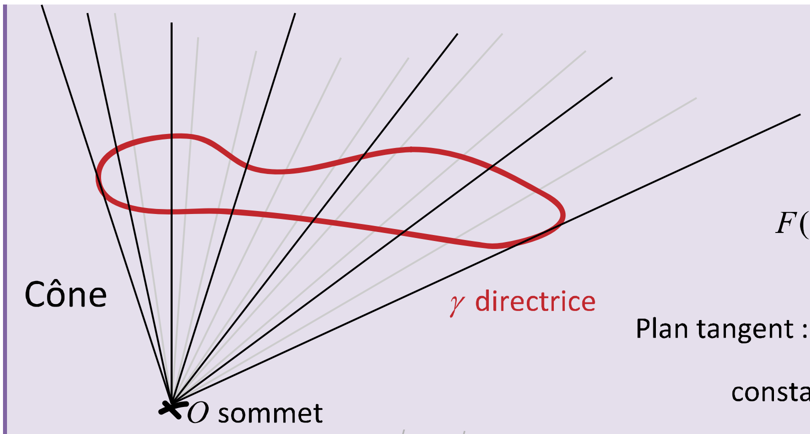
Arcs tracés

L'arc (I,γ) de $\mathbb{R}^3$ est tracé sur Σ s'il existe $\delta:I\to D$ tq $\gamma=F\circ\delta$. On impose δ $\mathcal{C}^k$ si γ $\mathcal{C}^k$

(I,γ) arc tracé sur Σ, sa tangente en un point régulier t_0 de γ est contenue dans $\mathcal{T}_\Sigma(\gamma(t_0))$

III. Cônes, cylindres, nappes de révolution

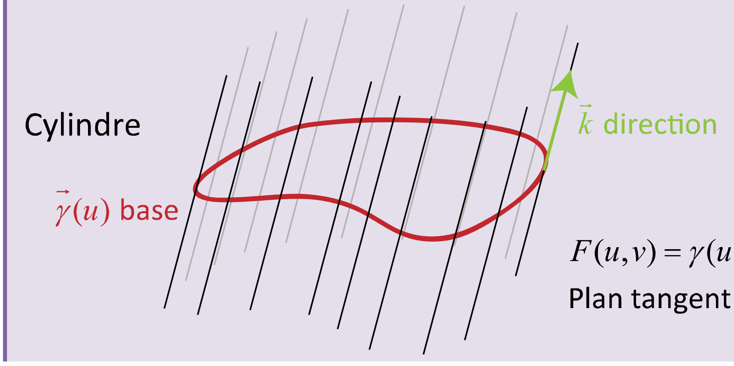
Nappes réglées : réunion de droites : $F(u,v)=A(u)+v\cdot\overrightarrow{B}(u)$ avec $A,B\in\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R}^3)$



$F(u,v)=O+v\cdot\overrightarrow{O\gamma(u)}$

Plan tangent : $\dfrac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial u}=v\overrightarrow{\gamma}'(u)$ $\quad\dfrac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial v}=\overrightarrow{O\gamma(u)}$

constant le long d'une génératrice

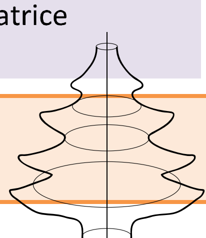


$F(u,v)=\gamma(u)+v\vec{k}$ $\qquad\overrightarrow{N}=\overrightarrow{\gamma}'(u)\wedge\vec{k}$

Plan tangent constant le long d'une génératrice

Nappes de révolutions : $x=f(u)\cos v,\quad y=f(u)\sin v,\quad z=g(u)$

Coordonnées cylindriques : $\rho=\varphi(z)$



IV. Surfaces

$S \subset \mathbb{R}^3$ est localement une surface en $A \in S$ s'il existe $U \in \mathcal{V}_O(A)$, $f \in \mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$ tq

$U \cap S = \{M \in U,\ f(M)=0\}$ et $\vec{\nabla} f(A) \neq 0$ Si c'est vrai $\forall A \in S$, S est une surface

Ω ouvert de $\mathbb{R}^3$, $A=(a,b,c)\in\Omega$, $f \in \mathcal{C}^1(\Omega,\mathbb{R})$. $S = f^{-1}(\{0\})\cap\Omega$

Fonctions implicites : Si $f(A)=0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial z}(A)\neq 0$, $\exists U \in \mathcal{V}_O(A)$, D ouvert de $\mathbb{R}^2$, $\varphi \in \mathcal{C}^1(D,\mathbb{R})$ tq

$\forall (x,y,z)\in U,\quad (x,y,z)\in S \Leftrightarrow z=\varphi(x,y)$ Le plan tangent à S en A est $\{P / \langle \nabla \vec{f}(A) \mid \overrightarrow{AP}\rangle = 0\}$

Intersection : $(S_1)\ f(x,y,z)=0$, $(S_2)\ g(x,y,z)=0$ surfaces. $A \in S_1 \cap S_2$

Supp plans tangents à S_1 et S_2 en A sont distincts ($\vec{\nabla} f(A), \vec{\nabla} g(A)$ libre)

Alors $\exists U \in \mathcal{V}_O(A)$, $\exists (I,\gamma)$ régulier, $U \cap S_1 \cap S_2 = \mathrm{supp}(\gamma)$

Inversion locale : $F:(x,y,z)\mapsto (f(x,y,z),g(x,y,z),z)\ldots(x,y,z)=G(0,0,z)$