Chap 34 : Arcs

$\mathcal{E}$ eae de dim 2 ou 3 rapporté à un SON $(\vec{i},\vec{j})$ ou $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

I. Langage

Un arc est un couple (I,γ) où I est une réunion finie d'intervalles non triviaux et $\gamma \in \mathcal{C}(I,\mathcal{E})$

$\Gamma = (I,\gamma)$ est de classe $\mathcal{C}^p$ si γ est de classe $\mathcal{C}^p$

Reparamétrage : $\mathcal{C}^p -$difféo $\psi : J \mapsto I$ $\quad \to (J,\gamma\circ\psi)$ de classe $\mathcal{C}^p$

Points simples/multiples/doubles... $\quad Supp(\Gamma) = \gamma(I)$

γ $\mathcal{C}^1$: $-M_0 = \gamma(t_0)$ point régulier si $\gamma'(t_0) \neq 0$ $\quad$ birégulier si $(\gamma'(t_0),\gamma(t_0))$ est libre

$M = \gamma(t_0)$: si $\exists p \geq 0 / \overrightarrow{\gamma^{(p)}}(t_0) \neq 0$, avec p minimal $\to$ tangente dirigée par $\dfrac{\overrightarrow{\gamma^{(p)}(t_0)}}{\left\|\gamma^{(p)}(t_0)\right\|}$

Dans les calculs d'équations : majuscules pour les eléments différentiels $(x...)$, majuscules pour les éléments tangents $(X...)$

Point régulier t : $\gamma(t) = (x(t),y(t)) \to$ Tangente : $\begin{vmatrix} X-x & x' \\ Y-y & y' \end{vmatrix} = 0$ $\quad$ Normale : $(X-x)x' + (Y-y)y' = 0$

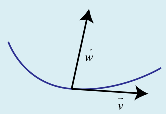
II. Etude locale

$\Gamma = (I,\gamma)$ $\mathcal{C}^\infty$, $t_0 \in I$ tq $Vect(\overrightarrow{\gamma^{(n)}}(t_0)) = \mathbb{R}^2$

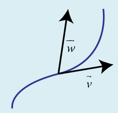
$p = \min\{k \in \mathbb{N}^* / \gamma^{(k)}(t_0) \neq 0\}, q = \min\{k > p / (\gamma^{(k)}(t_0),\gamma^{(p)}(t_0))$ libre$\}$

$\vec{v} = \gamma^{(p)}(t_0), \vec{w} = \gamma^{(q)}(t_0)$ $\quad$ Dans la base $(\vec{v},\vec{w})$, $\overrightarrow{M(t_0)M(t_0+h)} = \left(\dfrac{h^p}{p!} + h^p\varepsilon_1(h)\right)\vec{v} + \left(\dfrac{h^q}{q!} + h^q\varepsilon_2(h)\right)\vec{w}$

p impair, q pair

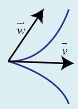


p,q impairs



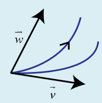
Point d'inflexion

p pair, q impair



Point de rebroussement 1er type

p,q pairs



Point de rebroussement 2e type

Dimension 3 : point triégulier $\gamma(t_0)$: $\overrightarrow{\gamma(t_0)\gamma(t_0+h)} = (h+o(h))\vec{e_1} + (h^2+o(h^2))\vec{e_2} + (h^3+o(h^3))\vec{e_3}$

Selon $(\vec{e_1},\vec{e_2})$: allure 1 (ordinaire) $\quad (\vec{e_1},\vec{e_3})$: inflexion $\quad (\vec{e_2},\vec{e_3})$: rebroussement 1

III. Abscisse curviligne

(I,Γ) arc $\mathcal{C}^\infty$ à valeurs à $(\mathbb{R}^n, can)$

L'abscisse curviligne sur Γ d'origine t_0 est $s(t) = \int_{t_0}^{t} \left\|\gamma'(s)\right\|_2 ds$ $\quad$ La longueur de Γ est $\ell(\Gamma_{\setminus[a,b]}) = \int_a^b \left\|\gamma'(s)\right\|_2 ds$

γ régulier. s abscisse curv. sur Γ d'origine t_0 : c'est un $\mathcal{C}^\infty -$difféo de I sur $J = s(I)$

$\varphi = \gamma \circ s^{-1}$ est le reparamétrage normal de γ $\quad \forall s \in J, \left\|\varphi'(s)\right\| = 1$

Cartésiennes : $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ Polaires : $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2$

IV. Rayon de courbure

$\mathcal{E}$ plan affine euclidien orienté $(O,\vec{i},\vec{j})$ $\Gamma = (I,\gamma)$ $\mathcal{C}^\infty$ régulier, (J,ψ) son param. normal

Le repère de Frénet en $M(s) \in \Gamma$ est : $\vec{\tau}(s) = \psi'(s)$, $\vec{\nu}(s) = \mathrm{rot}_{\pi/2}(\vec{\tau}(s))$ $(M,\vec{\tau},\vec{\nu})(s)$ est un RON direct

On note $\vec{\tau}(s) = (\cos\varphi(s), \sin\varphi(s))$ et $\vec{\nu}(s) = (-\sin\varphi(s), \cos\varphi(s))$

$\forall s \in J, \exists c(s) \in \mathbb{R}$ tq $\dfrac{d\vec{\tau}}{ds} = c(s)\vec{\nu}(s)$ $c(s)$ est la courbure algébrique de Γ en $M(s)$ $c(s) = \vec{\tau}'(s) \cdot \vec{\nu}(s)$ est $\mathcal{C}^\infty$

Le rayon de courbure est $R(s) = \dfrac{1}{c(s)}$ Le centre de courbure est $I(s) = M(s) + R(s)\vec{\nu}(s)$

$$c(s) = \frac{[\gamma'(s), \gamma''(s)]}{\|\gamma'\|^3} = \frac{\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$$ Si $y = f(x)$, $c(s) = \dfrac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$ En polaire : $c(s) = \dfrac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}$

$^{(I)}$ $\left(\dfrac{1}{\rho}\right) + \left(\dfrac{1}{\rho}\right)'' = \dfrac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{\rho^3}$ Frénet : $\dfrac{d\tau}{ds} = c(s)\nu(s)$ $\dfrac{d\nu}{ds} = -c(s)\tau(s)$

γ courbe fermée $\mathcal{C}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ de longueur $L > 0$. Supp γ paramétrée par s, $L-$périodique

$K = \int_0^L |c(s)|\, ds = \int_0^l \|\gamma''\|$ Si $\gamma([0,L]) \subset \overline{B}(0,r)$, alors $L < rK$ avec égalité *ssi* γ est un cercle

$L = \int_0^L \|\gamma'\|^2$ $(\| \ \| = 1)$, IPP : $L = -\int_0^L \vec{\gamma} \cdot \overrightarrow{\gamma''}$ + CS, et égalité : CS $\rightarrow$ courbe plane, + CS

Théorème de relèvement

$S^1=\mathbb{U}=\{z\in\mathbb{C}/\,|z|=1\}$

V. Relèvement différentiable

I intervalle de $\mathbb{R}$, $f\in\mathcal{C}^1(I,S^1)$ $\exists\varphi\in\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$ tq : $\forall t\in I, f(t)=e^{i\varphi(t)}$

Si $\psi\in\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ vérifie : $\forall t\in I, f(t)=e^{i\varphi(t)}$, alors $\exists k\in\mathbb{Z},\ \psi=\varphi+2k\pi$

$f'=i\varphi' f\to\varphi_0(t)=\frac{1}{i}\int_{t_0}^{t}\frac{f'(u)}{f(u)}du$ $(e^{-i\varphi_0(t)}f(t))'=0\to e^{-i\varphi_0}f=e^{i\theta_0}$ cte: $f(t)=e^{-i(\varphi_0(t)+\theta_0)}$

Si $f\in\mathcal{C}^1(I,\mathbb{C}^*), \forall\varphi\in\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$ tq : $\forall t\in I, f(t)=|f(t)|e^{i\varphi(t)}$

En ajustant des constantes, on a la même chose pour les arcs $\mathcal{C}^1{}_{pm}$

VI. Applications

Il n'existe pas de fonction $g\in\mathcal{C}(\mathbb{C}^*,\mathbb{C}^*)$ tq : $\forall z\in\mathbb{C}, g(z)^2=z$

p.abs : g $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{C}^*$ par inversion loc. de $z\mapsto z^2$ $+$ relèvement en 0 et 1

$(\mathcal{E})$ $x''+ax''+bx=0$, x sol non nulle de $(\mathcal{E}):(x'(t),x(t))\neq(0,0)\to\rho\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ \theta\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tq

$x'=\rho\cos\theta$ et $x=\rho\sin\theta$ $\theta'=\cos^2\theta+b\sin^2\theta+\frac{a}{2}\sin(2\theta)$

(I,γ) $\mathcal{C}^\infty$ régulier : $\exists\varphi\in\mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R})$ tq $\vec{\tau}(s)=(\cos\varphi(s),\sin\varphi(s))\to c(s)=\frac{d\varphi}{ds},\ R(s)=\frac{ds}{d\varphi}$

En polaire : $v=(\overrightarrow{OM},\vec{T})$ (angle rayon-tangente), $\overrightarrow{OM}=\rho(\theta)\vec{u}(\theta)$ $\Rightarrow\tan v=\frac{\rho}{\rho'},\ \varphi=\theta+v$