Chap 33 : Optimisation

I. Généralités

A compact <u>non vide</u>, $f \in \mathcal{C}(A,\mathbb{R}) \Rightarrow f$ est bornée et atteint ses bornes

$f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$, si $\lim\limits_{\|X\|\to+\infty} f(X) = +\infty$, f est minorée et atteint son inf

II. Méthodes à l'ordre 1

$f \in \mathcal{C}^1(\Omega, F)$, $a \in \Omega$ est point critique de f lorsque df_a n'est pas surjective

Si $F = \mathbb{R}$, cela revient à $df_a = 0$

Ω OUVERT de $\mathbb{R}^n$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$. $a \in \Omega$ extremum local de f Si f admet en a n dérivées part., $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0 \ \forall i$

Si f est différentiable en a, $df_a = 0$ (a est critique)

Caractère ouvert (Id sur $[0,1]$), pas de réciproque ($x \mapsto x^3$ en 0)

Le max peut être atteint en point de non diff (fonctions APM)

$f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ tq $\forall \lim\limits_{\|x\|\to+\infty} \dfrac{f(x)}{\|x\|} = +\infty \Rightarrow \nabla f$ est surj $\left(g(x) = f(x) - \langle b \mid x\rangle \geq \|x\| \left(\frac{f(x)}{\|x\|} - \|b\|\right) \to +\infty, \exists \min : \nabla g(a) = 0\right)$

$f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ tq $\exists \lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ et f a un unique pt critique a. $(\mathcal{E})$ $x' = -\nabla f(x)$ Toute sol max de $(\mathcal{E})$ est définie sur $]\alpha,+\infty[$, et $\exists \lim\limits_{+\infty} x = a$ (CL, $\forall \lambda, \mu, K_{\lambda,\mu} = \{x / \mu \leq f(x) \leq \mu\}$ compact $(]\alpha,\beta[, x)$ sol max, $^{(I)} f \circ x ?$: strict $\searrow$ si $x \neq a$, bornée en β si fini... OK. si $x \not\to a, x \in K_{\lambda_0, f(x(t_0))}$ apcr, $f'(x(t)) \leq -\nu$ NON)

III. Conditions d'ordre 2

Ω OUVERT de $\mathbb{R}^n$, $f \in \mathcal{C}^2(\Omega,\mathbb{R}), a \in \Omega, H_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)_{i,j}$, $d^2 f_a(h,h) = {}^t h H_f(a) h = q_a(h)$

Taylor : $f(a+h) = f(a) + \displaystyle\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \frac{1}{2} d^2 f_a(h,h) + o(\|h\|^2)$

a pt critique de f Si $d^2 f_a$ est def$_+$, f possède un min. local strict.

Si f présente un min local strict en a, $d^2 f_a$ est positive

Si la signature de q_a est (s,t) avec $s \neq 0, t \neq 0$, a N'EST PAS un extremum local

Dim 2 : $m = (a,b)$, notations de Monge : $p = \dfrac{\partial f}{\partial x}(m)$, $q = \dfrac{\partial f}{\partial y}(m)$, $r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(m)$, $s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(m)$, $t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(m)$

CN d'extremum loc : $p = q = 0$, $A = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$ pos ou neg. CS : $p = q = 0$, A def$_-$ ou def$_+$ $(\Leftrightarrow r > 0, rt - s^2 > 0)$

Si $\det A < 0$, on a un point col   Positive ne suffit pas : $z = y^2 - x^4$

Ω ouvert cvexe de $\mathbb{R}^n$. $f \in \mathcal{C}^1(\Omega,\mathbb{R})$ cvexe $\Rightarrow \forall a,b \in \Omega$, $f(b) \geq f(a) + \nabla f(a) \cdot (b-a)$

a critique $\Leftrightarrow a$ min global g $\mathcal{C}^2$ cvexe $\Leftrightarrow \forall x, d^2 g_x$ positive