Chap 32 : Formes quadratiques

I. Formes bilinéaires

$\mathbb{K}$ corps commutatif, E $\mathbb{K}-$ev

$B_2(E,\mathbb{K})=\{\varphi\in\mathcal{F}(E\times E,\mathbb{K})\,/\,\varphi$ bilinéaire$\}$ A $\varphi\in B_2(E,\mathbb{K})$, on attache $\Gamma_\varphi\begin{cases}E\to E^*\\ x\mapsto\varphi(x,\bullet)\end{cases}$ et $\Delta_\varphi\begin{cases}E\to E^*\\ x\mapsto\varphi(\bullet,x)\end{cases}$

$S_2(E,\mathbb{K})=\{\varphi\in B_2(E,\mathbb{K})\,/\,\forall(x,y)\in E^2,\ \varphi(x,y)=\varphi(y,x)\}$ formes symétriques

$A_2(E,\mathbb{K})=\{\varphi\in B_2(E,\mathbb{K})\,/\,\forall x\in E,\ \varphi(x,x)=0\}$

car $\mathbb{K}\neq 2$ $A_2(E,\mathbb{K})=\{\varphi\in B_2(E,\mathbb{K})\,/\,\forall(x,y)\in E^2,\ \varphi(x,y)=-\varphi(y,x)\}$ formes antisymétriques

E est désormais de dim finie

$(e_1\dots e_n)$ base de E, $\varphi\in B_2(E,\mathbb{K})$ La matrice de φ dans la base (e) est $[\varphi]_{(e)}=[\varphi(e_i,e_j)]_{i,j}$

C'est la seule matrice $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tq : $\forall(x_1\dots x_n,y_1\dots y_n)\in\mathbb{K}^{2n}$, $\varphi(\sum_{i=1}^n x_ie_i,\sum_{i=1}^n y_ie_i)=\sum_{i,j\in 1,n^2}A(i,j)x_iy_i$

$\begin{cases}B_2(E,\mathbb{K})\to\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\\ \psi\mapsto[\psi]_{(e)}\end{cases}$ est un isomph de $\mathbb{K}-$ev Dans $\mathbb{R}^n$: $\varphi(X,Y)={}^tXAY$

$(e),(f)$ bases de E $P=[(f)]_{(e)}$, $\varphi\in B_2(E,\mathbb{K})$ $[\varphi]_{(e)}={}^tP[\varphi]_{(e)}P$

La relation de congruence : A congru à $B\Leftrightarrow\exists P\in GL_n(\mathbb{K}),\ B={}^tPAP$ est d'équivalence

$\mathrm{rg}([\varphi]_{(e)})$ ne dépend pas de la base (e), on l'appelle rang de φ

$\det B=(\det P)^2\det A\neq\det A$ a priori

(e) base de E, (e^*) sa base duale $[\Gamma_\varphi]_{(e),(e^*)}={}^t[\varphi]_{(e)}$ $\Rightarrow\mathrm{rg}\,\varphi=\mathrm{rg}\,\Gamma_\varphi$

On dit que φ est non dégénérée lorsque $\mathrm{rg}\,\varphi=\dim E$ $\Leftrightarrow\exists(e),\det[\varphi]_{(e)}\neq 0\Leftrightarrow\Gamma_\varphi\in GL(E,E^*)$

II. Formes symétriques, antisymétriques

car $\mathbb{K}\neq 2$

$B_2(E,\mathbb{K})=S_2(E,\mathbb{K})\oplus A_2(E,\mathbb{K})$

(e) base de E : $\varphi\in S_2(E,\mathbb{K})\Leftrightarrow[\varphi]_{(e)}\in S_n(\mathbb{K})\Leftrightarrow\Gamma_\varphi=\Delta_\varphi$ $\varphi\in A_2(E,\mathbb{K})\Leftrightarrow[\varphi]_{(e)}\in A_n(\mathbb{K})\Leftrightarrow\Gamma_\varphi=-\Delta_\varphi$

$\exists\varphi\in A_2(E,\mathbb{K})$ non dégénérée $\Leftrightarrow\dim E$ est paire $(\det A=\det{}^tA\dots)$

III. Formes quadratiques

car $\mathbb{K}\neq 2$

$q:E\to\mathbb{K}$ est une forme quadratique s'il existe $\varphi\in B_2(E,\mathbb{K})$ tq : $\forall x\in E,q(x)=\varphi(x,x)$

$Q_2(E)=\{$formes quadratiques sur $E\}$ est un espace vectoriel

$\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$ On peut supposer φ symétrique. $\dim Q_2(E) = \dfrac{n(n+1)}{2}$

$\forall q \in Q_2(E), \forall! \varphi \in S_2(E, \mathbb{K})$ tq $\forall x \in E, q(x) = \varphi(x,x)$ φ est la forme polaire de q

$\varphi(x,y) = \dfrac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y)) = \dfrac{1}{4}(q(x+y) - q(x-y))$ identité de polarisation/du parallélogramme

$^{(I)}$Calculs dans $\mathbb{K}^n$ dans une base fixée : $A \in S_n(\mathbb{K}), q_A(X) = {}^tXAX = \sum_{i=1}^{n} A(i,i)x_i^2 + 2\sum_{1 \le i < j \le n} A(i,j)x_i x_j$

La matrice de $q \in Q_2(E)$ dans la base (e) de E est par définition celle de sa forme polaire

Si $A = [q]_{(e)}, A(i,j) = \varphi(e_i, e_j) = \dfrac{1}{2}(q(e_i + e_j) - q(e_i) - q(e_j))$ Rang de q : celui de A

Discriminant : $\det A$ /!\ changement de base q non dégénérée $\Leftrightarrow dis_{(e)}(q) \neq 0 \Leftrightarrow \varphi$ non dénégérée

Pour reconnaître une forme quadratique et trouver sa forme polaire, on peut étudier

$\dfrac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y))$, et voir si elle est bilinéaire

IV. Orthogonalité et isotropie //HP//

car $\mathbb{K} \neq 2$, E $\mathbb{K}-$ev de dim finie $n \geq 1$, $q \in Q_2(E)$, φ sa forme polaire

x et y sont $q-$orthogonaux lorsque $\varphi(x,y) = 0$, on note $x \perp_q y$ $A \subset E : A^\perp = \{y \in E / \forall x \in A, \varphi(x,y) = 0\}$

$A^\perp$ est un sev de A || $A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A$ || $A \subset A^{\perp\perp}, A^\perp = A^{\perp\perp\perp}$ || $A^\perp = \Gamma_\varphi^{-1}\{A°\}$

Si q est non dégénérée, Γ_φ est un isomph $\Rightarrow A$ sev, $\dim A^\perp = n - \dim A, A^{\perp\perp} = A$

Noyau de q : $N_q = \ker \Gamma_\varphi = \{x \in E / \forall y \in E, \varphi(x,y) = 0\}$ Cône de q : $\{x \in E / q(x) = 0\}$

$N_q \subset C_q$, en général différents $x \in C_q \Leftrightarrow x \perp_q x \Leftrightarrow \mathbb{R}_x \subset (\mathbb{R}x)^\perp$

V. Bases orthogonales, réduction //HP//

Il existe des bases orthogonales pour q (ou φ), c'est à dire des bases de E tq $[\varphi]_{(e)} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$

Changement de base $\Rightarrow$ changement de VP

$\mathbb{K} = \mathbb{R} : \exists (e)$ base de $E, r, s \in \mathbb{N}$ tq : $[q]_{(e)} = \begin{pmatrix} I_r & & 0 \\ & -I_s & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$ (r,s) ne dépend que de q, c'est la signature de q

Unicité : autre BO (e') tq $[q]_{(e')} = \begin{pmatrix} I_{r'} & & \\ & I_{s'} & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ $F = Vect(e_1 ... e_r), H = Vect(e'_{r'+1} ... e'_n)$,

$\forall x \in F, x \neq 0, q(x) > 0, \forall x \in G, q(x) \leq 0$ $F \cap G = \varnothing, \dim F + \dim G \leq n \Rightarrow r \leq r' ...$

$\mathbb{K} = \mathbb{C} : \exists$ base $(e_1 ... e_n)$ de E tq $[q]_{(e)} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, r = \operatorname{rg} q$

$A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{C}), \forall P \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}), A = {}^tPP$ $\quad (q_A(X) = {}^tXAX, {}^tPAP = I_r \Rightarrow A = ({}^tP^{-1}I_r)(I_rP^{-1}))$

Méthode de Gauss : $q(x_1 \dots x_n) = \sum a_{i,j} x_i x_j$, on le décompose en carrés :

Si q possède un carré, $a_{11} \neq 0$, $q(x) = a_{11}\left(x_1 + \frac{s(x_2 \dots x_n)}{2}\right)^2 - \left(r - \frac{a_{11}s^2}{4}\right)(x_2 \dots x_n)$

Sinon, p.ex $a_{1,2} \neq 0$, on utilise $(u+v)^2 - (u-v)^2 = 4uv$

VI. Formes quadratiques positives

On dit qu'une forme quadratique $q : E \to E$ est positive lorsque : $\forall x \in E, q(x) \geq 0$

Elle est définie positive lorsque : $\forall x \in E \setminus \{0\}, q(x) > 0$

On note $Q^+(E)$ (cône convexe) et $Q^{++}(E)$ (cône strictement convexe) les ensembles associés

$q \in Q^+(E) \Rightarrow C_q = N_q$ (CS)

(e) base de E, $A = [q]_{(e)} = (a_{i,j})_{i,j}$

q positive $\Leftrightarrow$ A symétrique positive $\qquad$ q définie positive $\Leftrightarrow$ A symétrique définie positive

q_A positive $\quad \max_{i,j} |a_{i,j}| = \max_i a_{i,i}$ $\qquad$ (CS)

Jacobi-Sylvester : $A \in S_n(\mathbb{R})$, $A_{i,i} = [a_{k,l}]_{k,l \leq i}$ $\quad$ A $\mathrm{def}_+ \Leftrightarrow \forall i, \det A_{i,i} > 0$ (avec signature, ineg et signe)

VII. Formes quadratiques en espace euclidien

E $\mathbb{R}-$eve de dim finie $n \geq 1$ $\quad$ A $u \in S(E)$, on attache $q_u : x \mapsto \langle u(x) | x \rangle$

$q_u \in Q_2(E)$ de forme polaire $(x,y) \mapsto \langle u(x) | y \rangle$ $\qquad$ $\varphi : \begin{cases} S(E) \to Q_2(E) \\ u \mapsto q_u \end{cases}$ est un isomph de $\mathbb{R}$-eve

$q \in Q_2(E)$, $\exists (e)$ BON et $\lambda_1 \dots \lambda_n \in \mathbb{R}$ tq : $\forall (x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$, $q\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$, ce sont les valeurs d'inertie de q

La liste $(\lambda_1 \dots \lambda_n)$ ne dépend (à l'ordre près) que de q $\qquad$ $q \in Q^+ \Leftrightarrow \forall i, \lambda_i \geq 0$ $\quad$ $q \in Q^{++} \Leftrightarrow \forall i, \lambda_i > 0$

$A \in S_n(\mathbb{R})$, $\lambda = \max spec(A)$, $q(X) = {}^tXAX$ $\quad$ $F = \{X \in \mathbb{R}^n \,/\, q(x) = \lambda \|x\|^2\}$ est un sev de $\mathbb{R}^n$

qui possède un vecteur à coordonnées positives

Congruence simultanée : $A \in S_n^{++}(\mathbb{R}), B \in S_n(\mathbb{R})$ $\qquad$ $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$ tq $A = {}^tPP, B = {}^tP\Delta P$

On prend $\langle X|Y \rangle_A = {}^tXAY$, on réduit dans $(\mathbb{R}^n, \langle\,|\,\rangle_A)$ eve

$A^{-1}B = P^{-1}\Delta P$ est diagonalisable

$A, B \in S_n^+(\mathbb{R})$ $\quad \det(A+B)^{1/n} \geq (\det A)^{1/n} + (\det B)^{1/n}$ $\qquad$ (si A def_+ ok, sinon, $A + \varepsilon I$)