Chap 31 : Equations non-linéaires autonomes

U ouvert de E

I. Généralités

Toutes les solutions envisagées sont maximales

Une équation autonome est de la forme $(\mathcal{E})\ y' = f(y)$, où $f : U \to E$

(I,φ) est sol. de $(\mathcal{E})$ autonome : $\forall a \in \mathbb{R}$, la translatée $x \mapsto \varphi(x+a)$ déf. sur $I - \{a\} = \{x - a \,/\, x \in I\}$ est sol

La trajectoire de (I,φ) est la courbe de E, c'est-à-dire : $x \mapsto \varphi(x)$

Trajectoir : $x \mapsto \varphi(x) \neq$ courbe intégrale : $x \mapsto (x, \varphi(x))$

Dans $\mathbb{R}$, la trajectoire de φ constante est un point, sa courbe intégrale une droite

Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, (I,φ) sol max de $(\mathcal{E})\ y' = f(y)$

- Deux sol max φ, ψ de $(\mathcal{E})$ donnant la même trajectoire se déduisent l'une de l'autre par translation de variable
- Si $\exists t_2 > t_1$ tq $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$, φ admet un prolongement périodique à $\mathbb{R}$ entier
- Les solutions de $(\mathcal{E})$ sont : des arcs-points, des arcs réguliers injectifs ou des arcs de Jordan (sol. périodique non triviale)

$\varphi(I) \cap \psi(J) \neq \varnothing$ suffit à dire que φ se déduit de ψ par translation

Sur $\mathbb{R}$: (I,φ) sol de $(\mathcal{E}) \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \varphi' \text{ ne s'annule pas } \Rightarrow f \text{ garde un signe constant strict sur } \varphi(I) \\ \text{ou } \varphi \text{ est constante} \end{array} \right.$

ED à variables séparables : Si $f(x,y) = \alpha(x)\beta(y) = \dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{dy}{\beta(y)} = \alpha(x)dx +$ intégration...

$f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ croissante, unique zéro a. $(]\alpha, \beta[, \varphi)$ sol max tq $\varphi' > 0 \Rightarrow \alpha = -\infty, \lim\limits_{-\infty} \varphi = a$

β est fini *ssi* $\displaystyle\int^{+\infty} \frac{du}{f(u)}$ CV $\left(\displaystyle\int_{\varphi(t_0)}^{\varphi(t)} \frac{du}{f(u)} = \int_{t_0}^{t} \frac{\varphi'(s)ds}{f(\varphi(s))} = t - t_0 \text{..., par l'absurde} \right)$

Toujours commencer par chercher les solutions stationnaires $\to$ séparatrices

$^{(I)}U$ ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^n)$, $(\mathcal{E})\ x' = f(x)$, $(]\alpha, \beta[, \varphi)$ sol max, $t_0 \in]\alpha, \beta[$

Si $\varphi([t_0, \beta[) \subset K$ compact de U, $\beta = +\infty$ Si $\exists \lim\limits_{\beta^-} \varphi = l \in U$, $\beta = +\infty$ et $f(l) = 0$

II. EDNL du second ordre

U ouvert de $\mathbb{R} \times E \times E$, $f \in \mathcal{C}(U, E)$ Une solution de l'ED $(\mathcal{E}'')\ y'' = f(x, y, y')$ est un couple (I, φ) tq :

$- I$ est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{C}^2(I, E)$ $- \forall x \in I$, $(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \in U$ et $\varphi''(x) = f(x, \varphi(x), \varphi'(x))$

Transformation du problème : $z = y' \Rightarrow (\mathcal{E}')\ (y,z)' = (z, f(x,y,z))$ On pose $F = E \times E$, $g \begin{cases} U & \to F \\ x,y,z & \mapsto (z, f(x,y,z)) \end{cases}$

$f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ $(\mathcal{E}'')\ y'' = f(x, y, y')$ $\forall (x_0, y_0, y'_0) \in U$, $\exists ! (I, \varphi)$ sol max de $(\mathcal{E}'')$ tq $\varphi(x_0) = y_0$ et $\varphi'(x_0) = y'_0$

Pour $E=\mathbb{R}$, par chaque point de $\mathbb{R}^2$ passe une infinité de solution (on fait varier point ET tangente)

III. Equations de Newton

Une équation de Newton est de la forme $(\mathcal{E})\ y''=f(y)$ où $f\in\mathcal{C}(J,\mathbb{R})$

Supp $f\in\mathcal{C}^1(J,\mathbb{R})$ Si y est sol, et $a\in\mathbb{R}$, $y\mapsto y(x+a)$ et $y\mapsto y(2a-x)$ sont solutions

Intégrales premières : F primitive de f sur J, y sol de $(\mathcal{E})$ sur I. $y''y'=f(y)y'\Rightarrow(\mathcal{E}_1)\ \frac{1}{2}y'^2-F(y)=cte$

Si y' est sans zéro sur I, $y'(x)=\varepsilon\sqrt{2F(x)+C}\to x=y^{-1}(y)=x_0+\varepsilon\int_{y_0}^{y}\frac{du}{\sqrt{2F(u)+C}}$

$(E)\ y''+2y^3=0$ Les sols sont périodiques sur $\mathbb{R}$

(intégrale première : $y'^2+y^4=C\Rightarrow y'$ borné, y'' int sur $]b-\alpha,b[\Rightarrow$ prolong^t

Zéros : isolés, au moins 1, pas de + gd par stricte concavité. 3 zéros consécutifs et int. 1^e $\to$ périodicité

Calcul de la période : intégrale première, sur une période)

Lien avec équations autonomes : $y''=f(x,y,y')\to(y,z)'=(z,f(x,y,z))$ donne une équation autonome si f ne dépend pas de $x\to$ Rechercher par étude de l'équation autonome associée.

Newton $\to$ Sys. auto. associé : $y''=f(y)$ est associé à $\begin{cases}Y'=X=\dfrac{\partial H}{\partial X}(X,Y)\\ X'=f(Y)=-\dfrac{\partial H}{\partial Y}(X,Y)\end{cases}$, $H(X,Y)=\frac{1}{2}X^2-F(Y)$

$\theta''=-\sin\theta$, $\varphi=\theta'\to\begin{cases}\theta'=\varphi\\ \varphi'=-\sin\theta\end{cases}$, si $\begin{cases}Y=\dfrac{\partial H}{\partial X}\\ X'=-\dfrac{\partial H}{\partial Y}\end{cases}$, les trajectoires sont contenues

dans les courbes : $H(X,Y)=C\to\frac{1}{2}u^2-\cos v=cte$