Chap 30 : Equations non linéaires ordinaires

E espace de Banach, U ouvert de $\mathbb{R}\times E$ $\qquad (\mathcal{E})\ y' = f(x,y)$

I. Solution d'une équation différentielle

U ouvert de $\mathbb{R}\times E$, $f\in\mathcal{C}(U,E)$. Une solution de l'équation différentielle $(\mathcal{E})$ est un couple (I,φ) où I est un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $f\in\mathcal{C}^1(I,E)$ et $\forall x\in I$, $(x,\varphi(x))\in U$ et $\varphi'(x)=f(x,\varphi(x))$

Une solution passe par le point $(x_0,y_0)\in U$ lorsque $x_0\in I$ et $f(x_0)=y_0$

U ouvert de X, $f:U\mapsto F$ $\quad f$ est localement lipschitzienne si $\forall x\in U$, $\exists V\in\mathcal{V}(x)$ tq $f_{\backslash V}$ est lispschitzienne

f $\mathcal{C}^1\Rightarrow$ localement lipschitzienne

Dans le cadre du programme, tous les théorèmes utilisent des fonctions $\mathcal{C}^1$.

En réalité, "localement lipschitzienne" est suffisant

Cauchy-Lipschitz : $f\in\mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$, $(x_0,y_0)\in U$ $\quad(\mathcal{E})\ y'=f(x,y)$

- $\exists(I,\varphi)$ solution de $(\mathcal{E})$ telle que $x_0\in\dot{I}$ et $\varphi(x_0)=y_0$
- Si (J,ψ) est solution de $(\mathcal{E})$ tq $x_0\in\dot{J}$ et $\psi(x_0)=y_0$, $\exists V\in\mathcal{V}(x_0)$ tq : $\forall x\in V\cap I\cap J$, $\varphi(x)=\psi(x)$

Les théorèmes sont vrais pour les ED résolues en y' : ne pas les utiliser pour $f(x,y,y')=0$

Mêmes hypothèses : si (I,φ) et (J,ψ) sont deux sols de $(\mathcal{E})$ passant par (x_0,y_0), φ et ψ coïncident sur $I\cap J$

$\{x\in\operatorname{int}(I\cap J)/\varphi(x)=\varphi(y)\}$ est fermé dans $\operatorname{int}(I\cap J)$, avec CL, A vois. de tous ses points $\Rightarrow$ ouvert

Contre exemple : f non loc. lipschitzienne : $y'=\sqrt{|y|}$: 0 et $\begin{cases}\frac{1}{4}(x-a)^2 \text{ si } x\geq a\\ 0 \text{ si } x\leq a\end{cases}$ sont sol, de val 0 en 0

II. Ordre sur les solutions, solutions maximales

(I,φ) prolonge (J,ψ) si $J\subset I$ et $\varphi_{\backslash J}=\psi$

$^{(I)}$ $f\in\mathcal{C}^1(U,E)$, $(x_0,y_0)\in U$ $\quad\exists!(I,\varphi)$ solution de $(\mathcal{E})$ telle que : $-\ x_0\in I$ et $\varphi(x_0)=y_0$

- $((J,\psi)$ sol de (E) tq $x_0\in J$ et $\psi(x_0)=y_0)\Rightarrow J\subset I$ et $\varphi_{\backslash J}=\psi$

L'intervalle de définition I est alors ouvert.

Cette solution est la solution maximale de $(\mathcal{E})$ passant par (x_0,y_0)

Les graphes des solutions maximales de l'ED $(\mathcal{E})$ sont appelée courbes intégrales de $(\mathcal{E})$

Sous les hypothèses de CL, les courbes intégrales de $(\mathcal{E})$ forment une partition de U.

III. Prolongement

$^{//HP//}$ $f\in\mathcal{C}^1(U,E)$, $(]a,b[,\varphi)$ sol de $(\mathcal{E})$, $b<+\infty$. $\qquad$ Si $\exists\varepsilon>0$ tq $\{(x,\varphi(x))/x\in]b-\varepsilon,b[\}\subset K$ compact de U, on peut trouver $c>b$ tq φ se prolonge en une sol de $(\mathcal{E})$ sur $]a,c[$

$^{(I)}\forall x\in]b-\varepsilon,b[,\ \varphi'(x)=f(x,\varphi(x))$ f est bornée sur $X\Rightarrow\varphi'$ est int $\Rightarrow\exists\lim_{b^-}\varphi=l$, par fermeture de K, $(b,l)\in K\subset U$

Si $\tilde{\varphi}(b)=l$ et $\tilde{\varphi}'(b)=f(b,l)$, $\tilde{\varphi}$ est sol, non max (J non ouvert) $\Rightarrow$ ...

$^{(I)}$Cas part. : f définie sur $\mathbb{R}\times E$, bornée sur $[a,b]\times E$ $(\forall a<b)\Rightarrow$ Toute sol max de $(\mathcal{E})$ est définie sur $\mathbb{R}$

Sur $\mathbb{R}$, la monotonie peut remplacer l'hypothèse compacte.

Si f' est bornée au voisinage de b, on peut utiliser l'intégrabilité de f' ou le critère de Cauchy

Toutes les solutions de $y'=x^2+y^2$ sont définies sur des intervalles bornés

$$\varphi'(x)=x^2+\varphi^2(x)\geq 1+\varphi^2(x)\Rightarrow\frac{\varphi'(x)}{1+\varphi^2(x)}\geq 1\Rightarrow\arctan\varphi(x)\to+\infty \text{ non}$$