Chap 29 : Equations différentielles linéaires

I. EDL scalaire

J intervalle de $\mathbb{R}$, $A,B,C\in\mathcal{C}(J,\mathbb{C})$ $\qquad (\mathcal{E}): A(x)y'(x)+B(x)y(x)=C(x)$

Un point $x_0\in J$ tel que $A(x_0)=0$ est une singularité de l'équation différentielle

On se place sur $I\subset J$ intervalle non trivial tel que $\forall x\in I, A(x)\neq 0$

$(\mathcal{E})$ devient : $y'+a(x)y(x)=b(x)$ $\qquad$ L'ED homogène associée est : $(\mathcal{E}_0)\quad y'(x)+a(x)y(x)=0$

$y'+ay=b$ est une forme ordinaire/résolue

Problème de Cauchy : étant donné $(x_0,y_0)\in I\times\mathbb{C}$, existence et unicité de y solution de $(\mathcal{E})$ tq $y(x_0)=y_0$

$\mathcal{S}_0=\{$Solutions de $(\mathcal{E}_0)\}$ $\qquad$ C'est un sev de $\mathcal{C}^1(I,\mathbb{C})$

α primitive de a sur I. L'ensemble des solutions de $(\mathcal{E}_0)$ est $\{x\mapsto Ce^{-\alpha(x)}\,/\,C\in\mathbb{C}\}$

En pratique : "$y'/y=-a$ d'où $\ln y=-\alpha(x)+c$" etc

y_p sol. particulière de $(\mathcal{E})\Rightarrow S=y_p+\mathcal{S}_0$

Variation des constantes : on cherche une solution particulière de $(\mathcal{E})$ sous la forme :

$$y(x)=Ce^{-\alpha(x)}, C\in\mathcal{C}^1(I,\mathbb{C}) \quad \Rightarrow C \text{ est une } \underline{\text{primitive de } x\mapsto e^{\alpha(x)}b(x)} : C(x)=\int_{x_0}^x e^{\alpha(t)}b(t)dt+K_0$$

Solution générale : $y(x)=\left(e^{-\alpha(x)}\int_{x_0}^x e^{\alpha(t)}b(t)dt\right)+C_0e^{-\alpha(t)}$

Le problème de Cauchy est résolu : il y a existence et unicité

$f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^+)$, $f+f'\xrightarrow{+\infty} l\Rightarrow f\xrightarrow{+\infty} l$ ($l=0$, via ED : $\varepsilon(x)=f(x)+f'(x)$, sol, comparaison)

$(a,b)\in\mathcal{C}(,\mathbb{R})$, a $T-$périodique $\quad y'+ay=b$ possède une unique sol $T-$périodique ssi $\alpha(T)\neq 0$

Si singularité : on regarde à la limite pour tenter de prolonger

$^{(I)}$ //HP// Gronwall : $u,v\in\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}^+)$. Supp $\exists K\in\mathbb{R}^+\ \forall x\in[a,b],\ u(x)\le K+\int_a^x uv\Rightarrow\forall x\in[a,b],\ u(x)\le K\exp\int_a^x v$

$K>0\quad w=K+\int_a^x uv>0, \mathcal{C}^1, w'=uv\Rightarrow\dfrac{w'}{w}\le v\Rightarrow\ln w(x)-\ln w(a)\le\int_a^x v \qquad K=0$ limite $K\to 0$

II. Systèmes différentiels linéaires

I intervalle de $\mathbb{R}$, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E $\mathbb{K}-ev$ de dim $n\ge 1$

$A\in\mathcal{C}(I,\mathcal{L}(E))\ \ B\in\mathcal{C}(I,E)$ $\qquad$ (ou matrices)

$(\mathcal{E})\ \ X'=AX+B$ $\qquad (\mathcal{E}_0)\ \ X'=AX$ $\qquad$ (càd : $\begin{pmatrix}x_1'(t)\\ \vdots\\ x_n'(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}(t)&\cdots&a_{1n}(t)\\ \vdots&&\vdots\\ a_{n1}(t)&\cdots&a_{nn}(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\ \vdots\\ x_n(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1(t)\\ \vdots\\ b_n(t)\end{pmatrix}$)

$\mathcal{S}_0=\{$sol de $(\mathcal{E}_0)\}$ est un sev de $\mathcal{C}^1(I,E)$. $\qquad$ Si $\mathcal{S}=\{$sol de $(\mathcal{E})\}\neq\varnothing$, c'est un sea de $\mathcal{C}^1(I,E)$ dirigé par $\mathcal{S}_0$

Si X_k est sol de $X'=AX+B_k$, $k\in[\![1,m]\!]$, $\sum_{k=1}^m\lambda_kX_k$ est sol de $X'=AX+\sum_{k=1}^m\lambda_kB_k$

Cauchy linéaire : $A \in \mathcal{C}(I, \mathcal{L}(E)), B \in \mathcal{C}(I, E), t_0 \in I, X_0 \in E$

Il existe une unique solution de $(\mathcal{E})$ $X' = AX + B$ définie sur I, telle que $X(t_0) = Y_0$

//HP// On prend $\forall t, X_0(t) = Y_0, X_{n+1}(t) = Y_0 + \int_{t_0}^{t}(A(s)X_n(s) + B(s))ds$, on étudie $\sum(X_{n+1} - X_n)$, majorations, récurrences,

$\alpha = \sup_{t\in J}\|A(t)\|, \beta = \sup_{t\in J}\|B(t)\| \rightarrow \|X_{n+1}(t) - X_n(t)\| \leq \alpha^n \frac{(t-t_0)^{n+1}}{(n+1)!}(\alpha\|Y_0\| + \beta)$ CVN sur segments $\Rightarrow$ CVU $\rightarrow X$ sol

Unicité : p.abs, X et $\tilde{X}$ sol, $Y = X - \tilde{X}$ sol/$Y(t_0) = 0$ $\|Y'(t)\| \leq \|A(t)\|\|Y(t)\|, w = \int_{t_0}^{t}\|Y'\| 0 \leq w \leq \int_{t_0}^{t}\|A\| w$ + Gronwall

$A \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^+)), B \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}_+^n), X$ sol sur $\mathbb{R}^n$ de $X' = AX + B, X(0) \geq 0 \Rightarrow \forall t \geq 0, X(t) \geq 0$ (meth. itérative)

$\left(\exp\int_{t_0}^{t} A\right)' \neq A\exp\int_{t_0}^{t} A$ Vrai si A commute avec $\int_{t_0}^{t} A$

$\begin{cases} \mathcal{S} \rightarrow E \\ X \mapsto X(t_0) \end{cases}$ est une bijection affine, $\begin{cases} \mathcal{S}_0 \rightarrow E \\ X \mapsto X(t_0) \end{cases}$ est un isomph de $\mathbb{K}-ev$ $\Rightarrow \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{S}_0 = \dim_{\mathbb{K}} E$

$(X_1 \ldots X_p)$ fam. de sol. de $X' = AX$ $(X_1, \ldots, X_p)$ est libre $\Leftrightarrow \exists t_0 \in I, (X_1(t_0) \ldots X_p(t_0))$ est libre $\Leftrightarrow \forall t \in I, \ldots..$

Une base $(X_1 \ldots X_n)$ est un système fondamental de solutions de $(\mathcal{E}_0)$

Si on a $(X_1(t_0) \ldots X_n(t_0)) = I_n$, $R = (X_1 \ldots X_n)$ est la résolvante d'indice t_0 et vérifie : $\forall t \in I, R'(t) = A(t)R(t)$

Variation des constantes $\rightarrow$ Trouver une sol part. de $(\mathcal{E})$ connaissant un système fondamental de $(\mathcal{E}_0)$

On cherche la solution sous la forme $X(t) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(t) X_k(t)$,

Cramer : λ_i est primitive de $t \mapsto \dfrac{\det(X_1(t), \ldots, X_{i-1}(t), B(t), X_{i+1}(t), \ldots, X_n(t))}{\det(X_1(t) \ldots X_n(t))}$

$X_1, \ldots, X_n$ famille de solutions de $(\mathcal{E}_0)$ $X' = AX, A \in \mathcal{C}(I, \mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$

Le Wronskien de $(X_1 \ldots X_n)$ est l'application $\begin{cases} I \rightarrow \mathbb{K} \\ t \mapsto \det(X_1(t) \ldots X_n(t)) \end{cases}$, noté $w_{(X_1 \ldots X_n)} = w$

$u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n), \forall x_1 \ldots x_n \in \mathbb{K}^n, \sum_{i=1}^{n} \det(x_1 \ldots u(x_i) \ldots x_n) = \operatorname{tr}(u) \det(x_1 \ldots x_n)$ (app. n-lin alt $\Rightarrow \lambda \det$, eval sur (can))

w est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\forall t \in I, w'(t) = \operatorname{tr}(A(t))w(t)$ $\Rightarrow \forall t_0 \in I, w(t) = w(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(s)ds\right)$

On a : soit $w = 0$, soit w ne s'annule pas sur I

III. EDL scalaires d'ordre n supérieur à 2

J intervalle de $\mathbb{R}, A_n, \ldots, A_0, B \in \mathcal{C}(J, \mathbb{K})$ $(\mathcal{E})$ $A_n y^{(n)} + \ldots + A_1 y' + A_0 y = B$

On se place sur $I \subset J$ où A_n ne s'annule pas (= hors des singularités)

$\rightarrow$ ED ordinaire : $(\mathcal{E})$ $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y = b$

$^{(I)}$On attache à $(\mathcal{E})$ le système différentiel $(\mathbb{S})\begin{cases} y_0' = y_1, \ y_1' = y_2 \ldots. \\ y_{n-1}' = -(a_0 y_0 + \ldots + a_{n-1}y_{n-1})b \end{cases}$

$$A(x)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ -a_0(x) & \cdots & \cdots & -a_{n-1}(x)\end{pmatrix} \qquad B(x)=\begin{pmatrix}0\\ \vdots \\ 0 \\ b(x)\end{pmatrix} \qquad (\mathbb{S}): \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{n-1}\end{pmatrix}'(x)=A(x)\begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{n-1}\end{pmatrix}(x)+B(x)$$

$y\in\mathcal{C}(I,\mathbb{K})$ $\quad$ y est de classe $\mathcal{C}^k$, sol de $(\mathcal{E})$

$\Leftrightarrow$ y est de classe $\mathcal{C}^1$ et il existe $y_1\dots y_n\in\mathcal{C}^1(I,\mathbb{K})$ tels que ${}^t(y,y_1,\dots,y_{n-1})$ soit sol. de $(\mathbb{S})$

Cauchy : $\forall x_0\in I$, $\forall(z_0\dots z_{n-1})\in\mathbb{K}^n$, il existe une unique solution de $(\mathcal{E})$ tq $y(x_0)=z_0,\dots,y^{(n-1)}(x_0)=z_{n-1}$

Si $b=0$, $\mathcal{S}_0=\{\text{sol. de }(\mathcal{E})\}$, $\forall x_0\in I$, $\varphi_{x_0}\begin{cases}S_0\to\mathbb{K}^n\\ y\mapsto(y(x_0),\dots,y^{(n-1)}(x_0))\end{cases}$ est un isomph de $\mathbb{K}-ev\Rightarrow\dim\mathcal{S}_0=n$

Pour $a_0\dots a_{n-1}$ constantes et $b=0$, on note $\lambda_1\dots\lambda_r$ les racines de multiplicité $\alpha_1\dots\alpha_r$, de l'équation caractéristique $X^n+a_{n-1}X^{n-1}+\dots+a_0=0$ $\quad\Rightarrow\mathcal{S}_0=Vect(x^k e^{\lambda_i\bullet})_{\substack{i\in 1,n\\ k\in 0,\alpha_i-1}}$

IV. EDL scalaires d'ordre 2

Sur J : $Ay''+By'+Cy=D$ $\quad\Rightarrow$ Sur I où A ne s'annule pas :

EDO : $(\mathcal{E})$ $y''+ay'+by=c$ $\qquad$ EDH : $(\mathcal{E}_0)$ $y''+ay'+by=0$

${}^{(I)}$Système associé : $(\mathbb{S})$ $\begin{pmatrix}y\\z\end{pmatrix}'=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -b & -a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y\\z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\c\end{pmatrix}$

$y\in\mathcal{C}(I,\mathbb{K})$ $\quad$ y est $\mathcal{C}^2$, sol de $(\mathcal{E})\Leftrightarrow y$ est $\mathcal{C}^1$, et $\exists z\in\mathcal{C}^1(I,\mathbb{K})$ tq (y,z) sol de $(\mathbb{S})$

Cauchy : $x_0\in I$, $\forall(y_0,y_0')\in\mathbb{K}^2$, $\forall! y\in\mathcal{S}$ tq $y(x_0)=x_0$ et $y'(x_0)=y_0'$

$\varphi_{x_0}\begin{cases}\mathcal{S}_0\to\mathbb{K}^2\\ y\mapsto(y(x_0),y'(x_0))\end{cases}$ est un isomph de $\mathbb{K}-ev$

$\varphi,\psi\in\mathcal{S}_0$ $\quad$ (φ,ψ) est une base de $\mathcal{S}_0\Leftrightarrow\left(\begin{pmatrix}\varphi\\ \varphi'\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\psi\\ \psi'\end{pmatrix}\right)$ est un sys. fond. de sol de $(\mathbb{S}_0)$

$\Leftrightarrow\exists/\forall x\in I,\begin{vmatrix}\varphi(x) & \psi(x)\\ \varphi'(x) & \psi'(x)\end{vmatrix}\neq 0$ $\qquad$ $\forall x\in I$, $w(x)=w(x_0)\exp\left(-\int_{x\_0}^x a\right)$

${}^{(I)}$On a : soit $w=0$, soit, $\forall x\in I, w(x)\neq 0$ $\qquad$ Si $(\mathcal{E}_0)$ est de la forme $y''+qy=0$, w est constant

Variation des constantes : on l'applique sur le système associé.

On cherche $\lambda,\mu\in\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$ tq $\begin{pmatrix}y\\z\end{pmatrix}(x)=\lambda(x)\begin{pmatrix}\varphi(x)\\ \varphi'(x)\end{pmatrix}+\mu(x)\begin{pmatrix}\psi(x)\\ \psi'(x)\end{pmatrix}$ soit sol.

$\Leftrightarrow{}^{(I)}\forall x\in I$, $\underbrace{\begin{pmatrix}\varphi(x) & \psi(x)\\ \varphi'(x) & \psi'(x)\end{pmatrix}}_{W(x)\text{ wronskienne}}\begin{pmatrix}\lambda'(x)\\ \mu'(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ c(x)\end{pmatrix}\Rightarrow$ On résout en $\begin{pmatrix}\lambda'(x)\\ \mu'(x)\end{pmatrix}$, on intègre

Chercher directement la forme $\lambda\varphi+\mu\psi$ ne mène à rien

$f\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tq $f''+f\geq 0\Rightarrow\forall x, f(x)+f(x+\pi)=0$ (passer par $f''+f=\varphi\geq 0$, VDC, expression intégrale...)

Si on connait une solution particulière z de l'EDL $Ay''+By'+Cy=D$ on cherche une solution affinement indépendante de z sous la forme $y=uz \to$ EDL du premier ordre en u, quadrature

$^{(I)}$On peut utiliser le wronskien : si $w=yz'-y'z$, $w(x)=C\exp\left(-\int_{x_0}^{x} a\right) \to$ EDL d'ordre 1 en y

Equation d'Euler : $x^2y''+axy'+by=0$, a,b ctes, sur $\mathbb{R}_+^*$, on pose $\underline{\underline{x=e^t}}$, $z(t)=y(e^t) \to$ EDL à coeffs csts

Compléments : méthodes usuelles

Variation des constantes : choix de constantes d'intégration $\to$ solutions bornées... (en général, $\int_{x_0}^{+\infty}$ ()...)

$f\in\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ bornée $\Rightarrow y''-y=f$ possède une unique sol bornée sur $\mathbb{R}$ (base : e^x, e^{-x}, $y=Ae^x+\int_0^x \frac{e^{-t}}{2} f(t)dt+...$)

$y''+ay'+by=0$, $a,b\in\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$, φ,ψ solutions à valeurs réelles.

$\varphi(x_0)=0$ et $\varphi\neq 0 \Rightarrow \exists\alpha>0$ tq $\forall x\in[x_0-\alpha,x_0+\alpha]\cap I$, $(x\neq x_0\Rightarrow\varphi(x)\neq 0)$ (Cauchy : $\varphi'\neq 0$)

$\Rightarrow [a,b]\subset I$, $\{x\in[a,b]/\varphi(x)=0\}$ est fini. (sinon, suite inj CV de zéros) $\|$ $\psi(x_0)=0\Rightarrow(\varphi,\psi)$ est liée

$x_1>x_0, \varphi(x_0)=\varphi(x_1)=0\Rightarrow\exists x\in[x_0,x_1]/\psi(x)=0$ (abs, $f=\varphi/\psi$, $f'=w/\psi^2$ strictement monotone...)

$q_1,q_2\in\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}), q_1\leq q_2$, $(\mathcal{E}_1\ y''+q_1y=0)$, $(\mathcal{E}_2\ y''+q_2y=0)$, φ sol $\neq 0$ de $(\mathcal{E}_1)/\varphi(a)=\varphi(b)=0$, ψ sol de $(\mathcal{E}_2)$

ψ s'annule sur $[a,b]$ (wronskien mixte : $w=\varphi'\psi-\varphi\psi'$, $w'=(q_2-q_1)\varphi\psi$ monotonie, signe)

Problème de Sturm-Liouville : $q\in\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $(\mathcal{E})\ y''+qy=0$ $\quad a<b$

Existence et unicité de $y\in\mathcal{S}$ tq $\varphi(a)=\alpha,\varphi(b)=\beta$? $\quad$ ($\neq$ problème de Cauchy)

Si $q\leq 0$, $\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$, $\exists!\varphi\in\mathcal{S}/\varphi(a)=\alpha$ et $\varphi(b)=\beta$ $\left(\varphi_1,\varphi_2 \text{ base, } \mathbb{S}_0 \begin{cases}\lambda\varphi_1(a)+\mu\varphi_2(a)=0\\ \lambda\varphi_2(b)+\mu\varphi_2(b)=0\end{cases}, \exists\text{unique } 0 \text{ de } \mathbb{S}_0\right)$

Développement en série entière $\to$ Franchissement des singularités

Analyse : Supp $\exists$ sol DSE, valeur des a_k ? $\quad$ Synthèse : on prend cette sol, on vérifie la CV

Etude asymptotique : VDC, solution intégrale...

Série de Fourier : regarder les coeff 1 à 1 pour l'analyse (ne pas développer tout de suite)

V. SDL à coefficients constants

$(\mathcal{E})\ X'(t)=AX(t)+B(t)$, $A\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, $B\in\mathcal{C}(I,\mathbb{K})$ $\qquad (\mathcal{E}_0)\ X'=AX$

Pour tout $x_0\in\mathbb{K}^n$, la solution X de $(\mathcal{E})$ tq $X(0)=x_0$ est : $\forall t\in\mathbb{R}$, $X(t)=\exp(tA)x_0$

La solution $M\in\mathcal{C}(I,\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}))$ de $M'=AM$ telle que $M(0)=I_n$ est : $\forall t\in\mathbb{R}$, $M(t)=\exp(tA)$

$A,B\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ $[A,B]=0\Rightarrow e^{A+B}=e^Ae^B$ ($(\mathcal{E})\ M'=(A+B)M$, $e^{t(A+B)}$ est la sol, $e^{tA}e^{tB}$ aussi avec $M(0)=I_n\to=$)

Au programme $\forall(s,t)\in\mathbb{R}^2$, $e^{(s+t)A}=e^{sA}e^{tA}$

$\varphi\in\mathcal{C}^\circ(\mathbb{R},\mathfrak{M}_n(\mathbb{C}))$ tq : $\forall(s,t)\in\mathbb{R}^2$, $\varphi(s+t)=\varphi(s)\varphi(t)$ et $\varphi(0)=I_n\Rightarrow\varphi(t)=e^{t\varphi'(0)}$

(Intégrer, DL pour inversibilité, dériver, SDL)

Structure : Si $\vec{V}$ est vecteur propre de A pour la vp λ, $t\mapsto e^{\lambda t}\vec{V}$ est sol de $(\mathcal{E}_0)$

Si A est diag dans la base $(\vec{V}_1...\vec{V}_n)$, avec $A\vec{V}_i=\lambda_i\vec{V}_i$, alors $(\mathcal{S}_0)=\left\{\sum_{i=1}^n\alpha_ie^{\lambda_it}\vec{V}_i,(\alpha_1...\alpha_n)\in\mathbb{K}^n\right\}$

$B\in\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{K}^n)$ Une solution particulière de $(\mathcal{E})$ est $t\mapsto e^{ta}\int_0^t e^{-sA}B(s)ds$

En général, trois possibilités : DL, diagonalisation ou calcul direct de e^{tA}

$x'',y''\to$ On pose $u=x',v=y'$ pour se ramener à l'ordre 1