Chap 28 : Exponentielle d'un endomorphisme et d'une matrice

Préliminaire (HP)

$(A,\|\ \|)$ algèbre de Banach, $\sum a_n z^n$ série entière de rayon $R>0$. Alors, pour tout $u\in A, \|u\|<R$

$\sum a_n u^n$ converge, et $\begin{cases} B_A(0,R) \to A \\ u \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n u^n \end{cases}$ est continue

I. Généralités

Si $(A,\|\ \|)$ est une algèbre de Banach, pour tout $u\in A$, $\sum \frac{u^n}{n!}$ converge,

sa somme est une fonction continue sur A : $\exp(u)=e^u=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u^n}{n!}$

[I] Cas particuliers : $A=\mathscr{L}(E)$ où E est de dim finie, ou bien $A=\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Toute norme sur A est équivalente à une norme d'algèbre

$u\in A$, $\left(I+\frac{u}{n}\right)^n \xrightarrow{n\to+\infty} e^u$ (Développer, $\alpha_{n,k} \nearrow_n 1$, sommes partielles, maj.)

II. Exponentielle de matrices

Pour $A\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ $\exp(A)=e^A=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{A^k}{k!}$

$\forall (A,P)\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})\times GL_n(\mathbb{K})$ $e^{P^{-1}AP}=P^{-1}e^AP$

$\forall A\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \det e^A=e^{\mathrm{tr}\,A}\Rightarrow e^A\in GL_n(\mathbb{R})$

$A,B\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ A,B $\mathbb{R}-$semblables $\Rightarrow$ A et B $\mathbb{R}-$semblables

$A\in\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ sans vp réelle : $A\sim\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a\end{pmatrix}$ $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ $\exp\begin{pmatrix}0 & -\alpha \\ \alpha & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$

$SO_n(\mathbb{R})=\{\exp(A)\,/\,A\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}),\ {}^tA=-A\}$ (Décomposition en rotations...)

$\exp : \begin{cases} S_n(\mathbb{R}) \to S_n^{++}(\mathbb{R}) \\ A \mapsto \exp A \end{cases}$ est une bijection (Surj : diago. Inj : $[u,e^u]=0$, sur espaces propres)