Chap 27 : Fonctions d'une variable réelle

I. Continuité

Voir chap 3 : limites (monotones), Heine, Optimisation, Connexité

II. Dérivabilité

$f : I \to E$ evn, $t_0 \in I$

f' est définie par une limite. Son existence $\Leftrightarrow$ différentiabilité

Dérivée à gauche/droite $\Rightarrow$ continuité à gauche/droite Dérivations successives : $\mathcal{D}^1, \mathcal{C}^1 \dots \mathcal{D}^k, \mathcal{C}^k, \dots, \mathcal{C}^\infty$

Opérations : CL, Leibniz, Compositions... $((xf)^{(n)} = xf^{(n)} + nf^{(n-1)})$

I intervalle de $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$, $f_1 \dots f_n : I \to E$ evn, dérivables en t_0, $\varphi : E^n \to F$ $n-$linéaire $\mathcal{C}^0$

Alors $g : t \mapsto \varphi(f_1(t), \dots, f_n(t))$ est dérivable en t_0, de dérivée : $g'(t_0) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(f_1(t_0), \dots, f_i'(t_0), \dots, f_n(t_0))$

Produit scalaire : $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ $\|u\|_2 = cte \Rightarrow u \cdot u' = 0$ $(u \wedge v)' = u' \wedge v + u \wedge v'$

Déterminant : $\det(u_1, \dots, u_n)'(t) = \sum_{i=1}^{n} \det(u_1(t), \dots, u_i'(t), \dots, u_n(t))$

III. Accroissements finis

$[a,b]$ segment de $\mathbb{R}$, $a < b$, $(E, \| \ \|)$ evn

$f \in \mathcal{C}([a,b], E) \cap \mathcal{D}^1(]a,b[, E)$, $g \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}) \cap \mathcal{D}^1(]a,b[, \mathbb{R})$ tq : $\forall t \in]a,b[$, $\|f'(t)\| \le g'(t)$

Alors $\|f(b) - f(a)\| \le g(b) - g(a)$

$A_\varepsilon = \{t \in [a,b] / \|f(t) - f(a)\| \le \varepsilon + \varepsilon(t-a) + g(t) - g(a)\}$ fermé, $c = \sup A_\varepsilon$, si $< b$, on trouve h tq $c + h \in A_\varepsilon$

Si $\|f'\| \le M$ sur $]a,b[$, f est $M-$lip. Si $f' = 0$ sur $]a,b[$, $f = cte$

$^{(I)}$But réel $\to$ EGALITE des AF $\dim \ge 2 \to$ NON

Darboux : $f \in \Delta^1(I, \mathbb{R}) \Rightarrow f'(I)$ est un intervalle ($x < y$, $g(x,y) = \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$, continue, connexité, EAF, dble $\subset$)

IV. Formules de Taylor

Taylor-Lagrange (BUT REEL) : $f \in \mathcal{C}^n([a,b], \mathbb{R}) \cap \mathcal{D}^{n+1}(]a,b[, \mathbb{R})$

$\exists c \in]a,b[$ tq $f(b) - f(a) = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \dfrac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$

$f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, $n \ge 2$. f et $f^{(n)}$ bornées $\Rightarrow \forall k \in [\![0,n]\!]$, $f^{(k)}$ bornée (TL en n points $\Rightarrow$ matrice inversible (VdM))

Inégalité de TL : $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b], E)$, E evn $\Rightarrow \left\| f(b) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \dfrac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \le \|f^{(n+1)}\|_\infty \dfrac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$

$f \in \mathcal{C}^n([a,b], E) \cap \mathcal{D}^{n+1}(]a,b[, E)$ suffit si $f^{(n+1)}$ est bornée

$f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b],E)$, E de Banach $f(b)=f(a)+\sum_{k=1}^{n}\frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)+\underbrace{\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt}_{=\frac{(b-a)^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(a+u(b-a))du}$

$f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},E)$ E de Banach $\varphi(f): x \mapsto \int_0^x f \Rightarrow \varphi^{\circ n}(f): x \mapsto \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f(t)dt$ (TRI)

Formule de Young (LOCALE) : $f: I \to E$, n fois dériv. en $a \in I$ $(n \geq 1) \Rightarrow f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)+o((x-a)^n)$

Zéros d'ordre fini : $f \in \mathcal{C}^n(I,\mathbb{C})$, $n \geq 1$, $f(a)=0$ Si $\exists k \in \ 1,n$ tq $f^{(k)}(a) \neq 0$, alors :

$\exists \eta > 0 / \forall x \in [a-\eta, a+\eta] \setminus \{a\} \cap I, f(x) \neq 0$ (Young en $\min\{k / f^{(k)}(a) \neq 0\}$)

Si f possède une dérivée seconde en $a \in \dot{I}$, $f''(a)=\lim_{h \to 0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}$