Chap 26 : Opérateurs en espace euclidien

E eve de dim finie $n \geq 1$

$(e_1 \ldots e_n)$ BON de E, $u \in \mathcal{L}(E)$, $A = (a_{i,j}) = [u]_{(e)} \Rightarrow \forall (i,j), a_{i,j} = \langle e_i \mid u(e_j) \rangle$

$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i \mid u(e_i) \rangle$ $\det A = [u(e_1) \ldots u(e_n)]$ si (e) directe

I. Adjonction

$u \in \mathcal{L}(E)$ $\exists! v \in \mathcal{L}(E)$ tq : $\forall (x,y) \in E^2$, $\langle u(x) \mid y \rangle = \langle x \mid v(y) \rangle$, v est l'adjoint de u, noté u^*

$u \in \mathcal{L}(E)$, (e) BON de E. $\forall v \in \mathcal{L}(E)$, $v = u^* \Leftrightarrow [v]_{(e)} = {}^t[u]_{(e)}$

$u \in \mathcal{L}(E)$ est auto-adjoint $\begin{cases} \text{symétrique si } u^* = u \\ \text{antisymétrique si } u^* = -u \end{cases}$, cela se retrouve dans les matrices en BON

$\operatorname{tr} u^* = \operatorname{tr} u$, $\det u^* = \det u$, $\chi_{u^*} = \chi_u$, $\operatorname{rg} u^* = \operatorname{rg} u$ || $\|u(x)\|^2 = \langle u(x) \mid u(x) \rangle = \langle x \mid u^* \circ u(x) \rangle$

$u \mapsto u^*$ est un anti-isomorphisme d'algèbre involutif : $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$

$\mathcal{S}(E) = \{u \in \mathcal{L}(E) / u^* = u\}$ et $\mathcal{A}(E) = \{u \in \mathcal{L}(E) / u^* = -u\}$ sont des sev de $\mathcal{L}(E)$, de dim $\dfrac{n(n+1)}{2}$ et $\dfrac{n(n-1)}{2}$

$u = \dfrac{u + u^*}{2} + \dfrac{u - u^*}{2}$ $\Rightarrow \mathcal{L}(E) = \mathcal{S}(E) \oplus \mathcal{A}(E)$

En dim finie $u \in \mathcal{L}(E)$ $\ker u^* = (\operatorname{Im} u)^\perp$, et $\operatorname{Im} u^* = (\ker u)^\perp$

F sev de E F stable par $u \Leftrightarrow F^\perp$ stable par u^*

II. Projecteurs et endomorphismes orthogonaux

$p \in \mathcal{L}(E)$ p proj orth $\Leftrightarrow p^2 = p$ et $p^* = p$ A mat de proj orth $\Leftrightarrow A^2 = A$ et ${}^tA = A$

$u \in \mathcal{L}(E)$ tq $\|u\| \leq 1$ $u_p = \dfrac{1}{p}(Id_E + \ldots + u^{p-1}) \xrightarrow{p \to +\infty} \pi$ proj $\perp$ sur $\ker(u - Id_E)$ p/r $\operatorname{Im}(u - Id_E)$

E eve de dim $n \geq 1$, $u \in \mathcal{L}(E)$ $u \in \mathcal{O}(E) \Leftrightarrow u^* \circ u = Id_E$ $(\Leftrightarrow u \circ u^* = Id_E \Leftrightarrow u$ inv et $u^{-1} = u^*)$

$\begin{cases} \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N}) \\ (x_n)_n \mapsto (0, x_1, x_2 \ldots) \end{cases}$ est une isométrie linéaire en espace préhilbertien non bijective

III. Endomorphismes symétriques

$u \in \mathcal{S}(E) \Leftrightarrow \exists (e)$ BON, $[u]_{(e)}$ est symétrique $\Leftrightarrow \forall (e)$ BON, $[u]_{(e)}$ est symétrique

Si λ et μ sont deux vp réelles de $u \in \mathcal{S}(E)$ différentes, $E_\lambda = \ker(u - \lambda Id_E) \perp E_\mu = \ker(u - \mu Id_E)$

Théorème spectral : $u \in \mathcal{L}(E)$ $u^* = u \Leftrightarrow$ Il existe une BON de vp de u

Rec dim 2 : $\chi_A \ldots$ dim ≥ 3 : $\exists$ sev stable de dim 1 ou 2+ $\uparrow$

$u\in\mathcal{S}(E)\Rightarrow E$ somme directe orth. des espa. propres de u $\quad\ker u^2=\ker u,\ F$ sev stable $\Rightarrow u_{\backslash F}$ diag...

$A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $\quad A$ symétrique $\Leftrightarrow A$ orthogonalement semblable à une matrice diagonale

FAUX sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$: $\begin{pmatrix}1 & i\\ i & -1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ (sur $\mathbb{C}$, $A^*={}^t\overline{A}$)

PS can. de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $\langle A\,|\,B\rangle=\sum_{i,j}a_{i\,j}b_{i\,j}=\mathrm{tr}({}^tAB)$ $\qquad \sum_{i,j}{a_{i,j}}^2=\sum_{\lambda\in Spec\,A}\lambda^2$

$A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\Rightarrow {}^tAA$ et $A\,{}^tA$ orth. semblables

Compléments

$u\in\mathcal{L}(E)$. $\ u^*=-u\Leftrightarrow\forall x\in E,\ \langle u(x)\,|\,x\rangle=0$, et dans ce cas, $\exists BON\ (e)$ de E

tq $[u]_{(e)}=\begin{pmatrix}A_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & A_k & \\ & & & 0\end{pmatrix}$ avec $A_k=\begin{pmatrix}0 & -a_k\\ a_k & 0\end{pmatrix}$ $\Rightarrow \mathrm{rg}\,u$ est pair

$u\in\mathcal{L}(E)$ est normal lorsque $u^*\circ u=u\circ u^*$ $\qquad$ (ce n'est pas un ev)

u symétrique, antisymétrique, orthogonal... $\Rightarrow u$ normal

$u\in\mathcal{L}(E)$ normal $\Rightarrow\exists(e)$ BON de E tq $[u]_{(e)}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & A_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & A_s\end{pmatrix}$, $A_i=\begin{pmatrix}a_i & -b_i\\ b_i & a_i\end{pmatrix}$ ($u=v+w$ (sym/asym)+sev stables)

${}^tAA=A\,{}^tA,\ A^4=A^5\Rightarrow A^2=A$(DDN sur $X^4(X-1)$, autoadjoint $\Rightarrow A$ proj sur $\ker A-I$ p/r $\ker A$)

IV. Positivité

$(E,\langle\,|\,\rangle)$ $\mathbb{R}-$eve de dim finie $n\geq 1$

$u\in\mathcal{S}(E)$ est positif lorsque, pour tout $x\in E$, $\langle u(x)\,|\,x\rangle\geq 0$

$u\in\mathcal{S}(E)$ $\qquad \varphi_u:(x,y)\mapsto\langle u(x)\,|\,y\rangle$ est bilinéaire symétrique. $\qquad u$ positif $\Leftrightarrow\varphi_u$ symétrique positive

On a alors l'inégalité de Schwarz : $\forall(x,y)\in E^2$, $\langle u(x)\,|\,y\rangle^2\leq\langle u(x)\,|\,x\rangle\langle u(y)\,|\,y\rangle$

$\Rightarrow\qquad \langle u(x)\,|\,x\rangle=0\Rightarrow u(x)=0$ $\qquad u$ sym pos $\Rightarrow\ker u=\{x\in E\,/\,\langle x\,|\,u(x)\rangle=0\}$

$u\in\mathcal{S}(E)$ est défini positif si : $\forall x\in E\setminus\{0\},\ \langle u(x)\,|\,x\rangle>0$ $\qquad\varphi_u$ est alors un produit scalaire

On note : $\mathcal{S}^+(E)=\{u\in\mathcal{S}(E)\,/\,u$ positif$\}$ $\qquad\mathcal{S}^{++}(E)=\{u\in\mathcal{S}(E)\,/\,u$ défini positif$\}$

$A\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ $\qquad A$ positive $\Leftrightarrow f_A$ positive dans $\mathbb{R}^n$ can $\Leftrightarrow\forall X\in\mathbb{R}^n,\ {}^tXAX\geq 0$

$\qquad A$ définie positive $\Leftrightarrow f_A$ définie positive dans $\mathbb{R}^n$ can $\Leftrightarrow\forall X\in\mathbb{R}^n,\ {}^tXAX>0$

$\mathcal{S}^+(E)$ et $\mathcal{S}^{++}(E)$ sont des cônes convexes : $\forall\lambda,\mu\in\underline{\mathbb{R}^+}^2,\forall(u,v)\in S^{+2},\ \lambda u+\mu v\in\mathcal{S}^+$

$\qquad\forall\lambda,\mu\in\underline{\mathbb{R}_+^*}^2,\forall(u,v)\in S^{++2},\ \lambda u+\mu v\in\mathcal{S}^{++}$

${}^{(I)}\left(\dfrac{1}{1+i+j}\right)_{i,j}$ est symétrique définie positive $\qquad\left(\sum_{i,j}\dfrac{x_ix_j}{1+i+j}=\int_0^1(x_0+\ldots+t^nx_n)^2\,dt\right)$

$^{(I)} u \in \mathcal{L}(E) \Rightarrow u^* \circ u$ est sym. pos. et $\operatorname{rg} u^* \circ u = \operatorname{rg} u \circ u^* = \operatorname{rg} u$ $\quad (\langle u^* \circ u(x) \mid x\rangle = \|u(x)\|^2, \ker \ldots)$

Identités fondamentales : $u \in \mathcal{S}(E)$ de spectre (réel) $(\lambda_1 \ldots \lambda_n)$, (e_i) BON de E tq $u(e_i) = \lambda_i e_i$

$$\forall x = \sum_{i=1}^n x_i e_i, \quad \langle u(x) \mid x\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \qquad \|u(x)\|^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 x_i^2$$

$u \in S(E)$ $\quad u$ positif $\Leftrightarrow \forall \lambda \in Spec(u), \lambda \geq 0$ $\quad u$ défini positif $\Leftrightarrow \forall \lambda \in Spec(u), \lambda > 0$

$A, B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \Rightarrow 0 \leq \operatorname{tr} AB \leq \operatorname{tr} A \operatorname{tr} B$ (matrices orthogonales, permutation dans trace)

Note : la trace permet des permutations <u>circulaires</u>

$\overset{(HI)}{=\!=} A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}), \exists! B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}), B^2 = A$ (red. en BON diag>0, $\sqrt{\lambda_i}$, uni:$[A, B] = 0$, esp. propres stables)

Décomposition polaire : $A \in GL_n(\mathbb{R}), \exists!(O, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}, A = OS$ ($S =$ racine def$_+$ de ${}^t AA$)

$u \in \mathcal{L}(E)$ $\quad \|u\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|u(x)\|_2 = \sup_{\|x\| \leq 1,\, \|y\| \leq 1} |\langle u(x) \mid y\rangle|$ $\quad$ (CS, $y = u(x)/\|u(x)\| \ldots$)

$u \in \mathcal{S}(E)$ $\quad \|u\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle u(x) \mid x\rangle| = \max_{\lambda \in Spec(u)} |\lambda| = \rho(u)$ rayon spectral de u

$u \in \mathcal{L}(E) \Rightarrow \|u\| = \sqrt{\rho(u^* \circ u)}$ $\qquad \|u\| = \|u^*\|$

$u \in \mathcal{S}^+(E)$ $\quad \underbrace{\max_{\|x\|=1} \langle u(x) \mid x\rangle = \max_{\lambda \in Spec(u)} \lambda}_{\text{vrai pour } \mathcal{S}(E)} = \max_{\|x\|=1} \|u(x)\|$ $\qquad \underbrace{\min_{\|x\|=1} \langle u(x) \mid x\rangle = \min_{\lambda \in Spec(u)} \lambda}_{\text{vrai pour } \mathcal{S}(E)} = \min_{\|x\|=1} \|u(x)\|$ (diag en BON)

Min-max/Courans-Fisher : $u \in \mathcal{S}(E)$ de spectre $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$ $\quad p \in [\![1, n]\!]$, $\mathfrak{F}_p = \{$sev de E de dim $p\}$

$$\forall p \in [\![1, n]\!], \lambda_p = \min_{F \in \mathfrak{F}_p} \max_{x \in S(0,1) \cap F} \langle u(x) \mid x\rangle$$ (double ineg, identités, $F \cap vect(e_p \ldots e_n) \ldots$)

$u \in \mathcal{L}(E)$, $\|u\| \leq 1$ et $|\det u| = 1 \Rightarrow u \in \mathcal{O}(E)$ $\quad$ ($\|u \circ u^*\| \leq 1, \forall \lambda \in Spec(u \circ u^*), 0 \leq \lambda \leq 1, \prod \lambda = 1, u \circ u^*$ sym)