Chap 25 : Groupe orthogonal

E ev euclidien de dim $n \geq 1$

I. Généralités

Si $(e_1 \dots e_n)$ bon de E, $\left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \middle| \sum_{i=1}^{n} y_i e_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \quad \begin{cases} E \to (\mathbb{R}^n, \langle\,|\,\rangle_{can}) \\ x \mapsto (x_1 \dots x_n) \end{cases}$ est un isomph d'eve

$u \in \mathcal{L}(E)$, on a équivalence entre : $-\ \forall x \in E,\ \|u(x)\|^2 = \|x\|^2 \qquad -\ \forall (x,y) \in E^2,\ \langle u(x) | u(y) \rangle = \langle x | y \rangle$

Dans ce cas, u est un endomorphisme orthogonal. $\mathcal{O}(E) = \{u \in \mathcal{L}(E)$ orthogonal$\}$ est un ss-gpe de $(GL(E), \circ)$

$u \in \mathcal{O}(E)$ tq $u \circ u = Id$ (involution orth) $\Leftrightarrow \exists F$ sev de E tq u est la sym s_F p/r F de dir $F^\perp$

H hyperplan $\Rightarrow s_H$ est notée r_H, réflexion d'hypp $H \quad \det(s_F) = (-1)^{\dim F} \quad u \in \mathcal{O}(E),\ u \circ s_F \circ u^{-1} = s_{u(F)}$

$Com(\mathcal{O}(E)) = \{$homothéties$\}$ (avec réflexions, $u(\mathbb{R}a) = \mathbb{R}a$ + Schur)

$u \in \mathcal{O}(E)$ laisse stable $F \Rightarrow u$ laisse stable $F^\perp$

$u \in \mathcal{O}(E) \Rightarrow \exists (r_1 \dots r_p)$ réflexions ($p \leq n$) tq $u = r_1 \circ \dots \circ r_p$ (Rec, $u(x) = x$ ou non...+ $\uparrow$)

$u \in \mathcal{L}(E)$. $u \in \mathcal{O}(E) \Leftrightarrow u$ transforme une BON en BON $\Leftrightarrow u$ transforme toute BON en BON

F, G sev de E $\exists u \in \mathcal{O}(E),\ u(F) = G \Leftrightarrow \dim F = \dim G$

II. Matrices orthogonales

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ On a équivalence entre : $-\ {}^tAA = I_n$ *ie* les col. de A sont une BON de $\mathbb{R}^n$ can

$-\ A\,{}^tA$ *ie* les lignes... $\qquad -\ f_A : X \mapsto AX$ est orthogonale dans $\mathbb{R}^n$ can

$-\ A$ est la mat. de passage d'une BON à une BON $\qquad -\ a = [u]_{(e)}^{(f)}$ où $u \in \mathcal{O}(E)$, (e) et (f) BON

A est alors une matrice orthogonale $\mathcal{O}(n, \mathbb{R}) = \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / {}^tAA = I_n\}$

$\begin{cases} \mathcal{O}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \\ u \mapsto [u]_{can} \end{cases}$ est un isomph de gpes $\quad \| \quad A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \det u \in \{-1; 1\}$ (idem $\mathcal{O}(E) / SO(E)$)

Le gpe spécial orth $SO_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) / \det A = 1\}$ est un ss-gpe disingué de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

$A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \left| \sum_{i,j \in [\![1,n]\!]^2} A(i,j) \right| \leq n \qquad (u = f_A,\ \sum A(i,j) = \langle u(\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n) | \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n \rangle + CS)$

$u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow u$ possède un sev stable de dim 1 ou 2

Si pas vp réelle : $\chi_u = P_1 \dots P_r$ où P_i irred, deg $2 \Rightarrow \exists i, a$ tq $P_i(u)(a) = 0 \Rightarrow u^2(a) = -\alpha u(a) - \beta a \Rightarrow vect(a, u(a))$ stable

Si $u \in \mathcal{O}(E)$, ses seules vp réelles sont 1 ou -1

//HP en dim >3// $u \in \mathcal{O}(E)$. $\exists (e)$ BON de E tq : $[u]_{(e)} = \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_m & \\ & & A \end{pmatrix}$ où $A = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_k \end{pmatrix} \begin{cases} A_i = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix} \\ \theta_i \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z} \end{cases}$

$\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est compact (fermé : $A \mapsto {}^tAA - I_n$ $\mathcal{C}°$), non connexe (det), $SO_n(\mathbb{R})$ compact connexe (thm ↑ +var)

$SO_3(\mathbb{R}) \to \exists$BON (e) de E tq $[u]_{(e)} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \cos\theta & -\sin\theta \\ & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ Axe (si $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$) : $\ker(A - Id) = \mathbb{R}e_1$

Angle : $\operatorname{tr} A = 1 + 2\cos\theta$ Signe : e_1 choisi $\to$ orientation, $[e_1, x, u(x)] = (x_2^{\ 2} + x_3^{\ 2})\sin\theta \to$ signe

III. Géométrie d'un espace euclidien

La matrice de Gramm de $(x_1 \dots x_p) \in E^p$ est $G(x_1 \dots x_p) = [\langle x_i \mid x_j \rangle]_{i,j}$, le dét. de Gramm $DG(x_i)_i = \det(G(x_i)_i)$

$(x_1 \dots x_p)$ est libre *ssi* $G(x_1 \dots x_p)$ est inv, et $DG(x_1 \dots x_p) \geq 0$ (si libre, (e) BON de $vect(x_i)$, $P = [x_i]_{(e)} : G = {}^tPP$)

$(x_1 \dots x_p)$ libre, $F = Vect(x_i)_i \Rightarrow \forall a \in E, d^2(a, F) = \dfrac{DG(a, x_1 \dots x_p)}{DG(x_1 \dots x_p)}$ ($a = u + v$, dvt ds G+$(u, x_1 \dots x_p)$ liée)

$(x_1 \dots x_{n+1})$ vects normés tq : $\forall i \neq j, \langle x_i \mid x_j \rangle = \gamma < 0 \Rightarrow (x_1 \dots x_n)$ libre, $\gamma = -\dfrac{1}{n}$ (avec Gramm, nb de vp)

E $\mathbb{R}-$ev de dim finie $n \geq 1$. (e) et (f) bases de E ont la même orientation ($(e) \sim (f)$) lorsque $\det[f]_{(e)} > 0$

$\sim$ est une relation d'équivalence possédant deux classes.

Orienter $E \to$ choisir l'une des classes (ce sont les bases positives ou directes)

E $\mathbb{R}-eve$, (e) et (f) BON de E. $\det_{(e)} = \det_{(f)}$ si (e) et (f) ont la même orientation, $\det_{(e)} = -\det_{(f)}$ sinon

Si E est orienté, $\det_{(e)}$ ne dépend pas de la BON directe choisie, on l'appelle produit mixte sur E, noté $[x_1 \dots x_n]$

$[x_1 \dots x_n]^2 = G(x_1 \dots x_n)$

$^{(I)}$Inégalité d'Hadamard : $(x_1 \dots x_n) \in E^n \Rightarrow |[x_1 \dots x_n]| \leq \prod_{i=1}^{n} \|x_i\|$ (det dans BON de Schmidt...)

Iwasawa : $A \in GL_n(\mathbb{R})$, $\exists! O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \exists! T$ triang sup à diag > 0 tq $A = OT$ (chgt base Schmidt...)

E eve orienté. $\forall (x_1 \dots x_{n-1}) \in E^{n-1}, \exists! x \in E$ tq $\forall z \in E, \langle x \mid z \rangle = [x_1 \dots x_{n-1}, z]$

x est le produit vectoriel de $x_1 \dots x_{n-1}$, noté $x = x_1 \wedge \dots \wedge x_{n-1}$

$\varphi : (x_1 \dots x_{n-1}) \mapsto x_1 \wedge \dots \wedge x_{n-1}$ est $(n-1)-$lin, alternée, et $\varphi(x_i) \neq 0 \Leftrightarrow (x_i)_i$ libre

$(e_1 \dots e_n)$ BON directe $\Rightarrow e_1 \wedge \dots \wedge e_{n-1} = e_n$ || Par dvt p/r colonne $\to$ formule usuelle en dim 3

$\|X \wedge Y\|^2 = \|X\|^2 \|Y\|^2 - \langle X \mid Y \rangle^2$

$E = \mathbb{R}^3$ can. $u \in \mathcal{L}(E)$ $\forall (x, y) \in E^2, u(x \wedge y) = u(x) \wedge u(y) \Leftrightarrow u \in SO(E)$