Chap 24 : Calcul différentiel

Préliminaire : Comparaison de fonctions à valeur dans un evn

(X,d) espace métrique, $A\subset X$, $a\in\overline{A}$, $(E,\|\ \|)$ evn.

$f,g\in\mathcal{F}(A,E)$ $\quad -f=\mathcal{O}_a(g)\Leftrightarrow \exists U\in\mathcal{V}(a), \exists r>0, \forall x\in U\cap A, \|f(x)\|\leq M\|g(x)\|$

$-f=o_a(g)\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists U_\varepsilon\in\mathcal{V}(a), \forall x\in U_\varepsilon\cap A, \|f(x)\|\leq\varepsilon\|g(x)\|$

$-f\sim_a(g)\Leftrightarrow f-g=o_a(g)$

$\mathcal{P}$ est une propriété locale lorsque : $\forall f,g:A\to E, (\exists U\in\mathcal{V}(a), f_{\backslash U\cap A}=g_{\backslash U\cap A})\Rightarrow(\mathcal{P}(f)\Leftrightarrow\mathcal{P}(g))$

I. Différentiabilité

$(E,\|\ \|_E)$ et $(F,\|\ \|_F)$ evn sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Ω ouvert de E, $a\in\Omega$

$f:\Omega\to F$ est différentiable en a s'il existe $\varphi\in\mathcal{L}_C(E,F)$ tq :

$$\forall x\in\Omega, f(x)=f(a)+\varphi(x-a)+\|x-a\|\varepsilon(x) \text{ où } \lim_{x\to a}\varepsilon(x)=0$$

$\Leftrightarrow f(a+h)=f(a)+\varphi(h)+o_0(h)$ C'est une propriété locale

f est différentiable sur Ω si elle l'est en tout point de Ω

f constante $\Rightarrow f$ diff sur Ω, avec $\varphi=0$ $\quad f$ linéaire $\Rightarrow\varphi=f$ $\quad f$ diff en $a\Rightarrow\mathcal{C}^0$ en a

S'il existe $\varphi\in\mathcal{L}_C(E,F)$ tel que $f(a+h)=f(a)+\varphi(h)+o_0(h)$, il est unique et est noté df_a

$a\in I$ intervalle de $\mathbb{R}$, $f:I\to E$ evn. $\quad f$ dérivable en $a\Leftrightarrow f$ différentiable en a

$\alpha>1\Rightarrow x\mapsto\|x\|_E^\alpha$ est diff. en 0 de diff. nulle $\qquad f\begin{cases}\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\to\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\\ A \mapsto A^2\end{cases}$ diff en A de diff $H\mapsto AH+HA$

$\|\ \|_E$ n'est pas diff. en 0 $\qquad (E,\langle\,|\,\rangle)$ ph réel $\Rightarrow x\mapsto\|x\|_2^2$ diff en $a\in E$ de diff. $h\mapsto 2\langle a\,|\,h\rangle$ $\mathcal{C}^0$

$f:E\times F\to G$ bilin. $\mathcal{C}^0\Rightarrow f$ diff en (a,b) de diff. $(h,k)\mapsto f(a,k)+f(h,b)$

Si f et g sont diff en a, $\lambda f+\mu g$ est diff en a de diff df_a+dg_a

$f\begin{cases}\Omega\to F_1\times\ldots\times F_p\\ x\mapsto(f_1(x),\ldots,f_p(x))\end{cases}$ diff en $a\in\Omega$ *ssi* $f_1\ldots f_p$ sont diff en a, et dans ce cas $df_a(h)=(df_{1a}(h),\ldots,df_{pa}(h))$

$f:\Omega\to\Omega'$ ouvert de F, $g:\Omega'\to G$, $a\in\Omega$, $b=f(a)\in\Omega'$, f diff en a de diff φ, g diff en b de diff ψ

$\Rightarrow g\circ f$ est diff en a de diff $\psi\circ\varphi$ $\qquad d(g\circ f)_a=dg_b\circ df_a$

$f:\Omega\to\mathbb{R}$, diff en $a\in\Omega\Rightarrow f^2$ diff en a, $d(f^2)_a:h\mapsto 2f(a)df_a(h)$ $\quad d(\sqrt{f})_a:h\mapsto\dfrac{df_a(h)}{2\sqrt{f(a)}}$

$(E,\langle\,|\,\rangle)$ eph réel, $a\in E\setminus\{0\}\}$ $\|\ \|_2$ est diff en a de diff $h\mapsto\left\langle\dfrac{a}{\|a\|_2}\middle|h\right\rangle$

Règle de la chaîne : $\gamma:I\to E$ arc dérivable en $t_0\in I$, avec $\gamma(t_0)\in\Omega$, $f:\Omega\to F$ diff en a

$\Rightarrow f\circ\gamma$ est dérivable en t_0 de dérivée $df_{\gamma(t_0)}(\gamma'(t_0))$

II. Dérivée selon un vecteur, dérivée partielle

Ω ouvert de l'evn E, $a \in \Omega$, $f : E \to F$ evn

$u \in E$. f possède une dérivée directionnelle selon le vecteur u lorsque $\gamma : t \mapsto f(a+tu)$ est définie au voisinage de 0 et possède une dérivée en 0

f diff en $a \Rightarrow \forall u \in E, f$ possède une dérivée selon u, égale à $df_a(u)$

RECIPROQUE FAUSSE $\quad (x,y) \mapsto \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2}$

E et F de dim finie. $(\vec{b_1}...\vec{b_p})$ base de F. $(e)=(e_1...e_n)$ base de E.

$f = \sum_{i=1}^{p} f_i \vec{b_i}$. $\quad f$ diff en $a \Leftrightarrow$ les (f_i) le sont, $\forall h \in E, df_a(h) = \sum_{i=1}^{p} df_{i\,a}(h)\vec{b_i}$ (vrai pour $\| \ \|_\infty$ + normes equiv)

f possède des dérivées partielles selon (e) lorsque : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, f possède une dérivée de direction e_i

f diff en $a \Rightarrow f$ possède des dérivées partielles $df_a(e_i)$ $\qquad$ RECIPROQUE FAUSSE

A base (e) fixée, on note $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \dfrac{f(a+te_i)-f(a)}{t}$ si elle existe.

Pour $E=\mathbb{R}^n$, on utilise la base canonique : $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \dfrac{f(a_1,...,a_i+t,...,a_n)-f(a_1,...,a_n)}{t}$

Lorsqu'elle existe, la différentielle est : $\sum_{i=1}^{n} h_i \vec{e_i} \mapsto \sum_{i=1}^{n} h_i \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$

$E=\mathbb{R}^n, F=\mathbb{R}^p, G=\mathbb{R}^q \qquad \Omega$ ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a\in\Omega$, $f:\Omega\to\mathbb{R}^p \qquad f=(f_1...f_n)$ (composantes de f)

Si f est diff en a, sa matrice jacobienne en a est : $J_f(a) = \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{i,j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$

Si $n=p$, le jacobien de f est $DJ_f(a) = \det(J_f(a))$

$J_f(a)$ est la matrice de df_a dans la base canonique

Si f est bij d'inverse diff, $\forall x, f\circ f^{-1}(x)=x$, $df_a \circ df^{-1}{}_b = Id$ et $J_f(a)J_{f^{-1}}(b)=I_n$

Si $(y_1...y_n)=f(x_1...x_n)$, $J_f = \left(\dfrac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)_{i,j}$, $J_{f^{-1}} = \left(\dfrac{\partial x_i}{\partial y_j}\right)_{i,j}$ $\qquad$ MAIS $\dfrac{\partial x_i}{\partial y_j} \neq \dfrac{1}{\frac{\partial y_j}{\partial x_i}}$

Composition : $(y_1...y_p)\in\mathbb{R}^p$, $(z_1...z_q)\in\mathbb{R}^q$, $g:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^q$ défini au vois. de $b=f(a)$ et diff en b

Pour $i\in[\![1,q]\!]$, $j\in[\![1,n]\!]$, $\dfrac{\partial(g\circ f)}{\partial x_j}(a) = \sum_{k=1}^{p} \dfrac{\partial g_i}{\partial y_k}(b)\dfrac{\partial f_k}{\partial x_j}(a)$

III. Applications de classe C¹

E, F evn quelconques

$f:\Omega\to F$ est de classe $\mathcal{C}^1$ lorsue : f est différentiable sur Ω et $df\begin{cases}\Omega\to(\mathcal{L}_C(E,F),\|\ \|)\\ a\mapsto df_a\end{cases}$ est continue

E de dim finie, de base $(e_1 ... e_n)$, f diff en Ω. f est $\mathcal{C}^1 \Leftrightarrow \forall i\in [\![1,n]\!]$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ est $\mathcal{C}^0$ sur Ω

$\Omega\in\mathbb{R}^n$, $f:\Omega\to\mathbb{R}^p$. f est $\mathcal{C}^1$ sur $\Omega \Leftrightarrow f$ possède des DP continues sur Ω

$d(\det)_A(H)=\operatorname{tr}(\tilde{A}H)$ (dvt comatrice, $\dfrac{\partial}{\partial x_{ij}}$...) $\qquad d(A\mapsto A^{-1})_A(H)=-A^{-1}HA^{-1}$

Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$, $(f_k),(u_k)\in\mathcal{C}^1(\Omega,\mathbb{R}^p)^{\mathbb{N}}$

Si (f_k) CVS vers f et, $\forall K\subset\Omega$ compact, $\forall i\in [\![1,n]\!]$, $\left(\dfrac{\partial f_k}{\partial x_i}\right)_k$ <u>CVU</u> vers g_i sur K, f est $\mathcal{C}^1$ sur Ω et $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}=g_i$

Si $\sum u_k$ CVS sur Ω et, $\forall K\subset\Omega$ compact, $\forall i\in [\![1,n]\!]$, $\sum\dfrac{\partial f_k}{\partial x_i}$ <u>CVU</u> sur K, $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}u_k$ est $\mathcal{C}^1$ sur Ω et $\dfrac{\partial\left(\sum\limits_{k=0}^{+\infty}u_k\right)}{\partial x_i}=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dfrac{\partial u_k}{\partial x_i}$

La CVU sur les compacts des différentielles entraîne celle des DP, donc la validité du théorème

$f=\sum a_n z^n$ SE de rayon >0 $\quad f$ est $\mathcal{C}^1$ de différentielle : $df_{z_0}(h+ik)=(h+ik)f'(z_0)$

$f:\mathbb{R}^n\times[a,b]\to\mathbb{R}^p$ de classe $\mathcal{C}^1 \Rightarrow F:(x_1,...,x_n)\mapsto\int_a^b f(x_1,...,x_n,t)dt$ est $\mathcal{C}^1$

$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{C}$, $\mathcal{C}^1$. $u,v\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})\Rightarrow F:x\mapsto\int_{u(x)}^{v(x)}f(x,t)dt$ est $\mathcal{C}^1$,

avec $F'(x)=f(x,v(x))v'(x)-f(x,u(x))u'(x)+\int_{u(x)}^{v(x)}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$

Compléments : gradient, divergence

$(E,\langle\,|\,\rangle)$ eve, Ω ouvert de E, $a\in\Omega$, $f:\Omega\to\mathbb{R}$ diff en a

$\exists!\vec{u}\in E$ tel que : $f(a+h)-f(a)=\langle\vec{u}\,|\,h\rangle+o(h)$, $\vec{u}$ est le gradient de f en a et est noté $\vec{\nabla}f_a$

$\vec{u}$ est défini indépendamment des bases.

Si $(\vec{e_1}...\vec{e_n})$ est une BON de E : $\vec{\nabla}f_a=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\vec{e_i}$ $\qquad$ Chaîne : $\dfrac{d}{dt}(f\circ\vec{\gamma})=\langle\vec{\nabla}f_a\,|\,\vec{\gamma}\rangle$

La divergence de f en a est : $\operatorname{div} f_a=\operatorname{tr} df_a \;=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial f_i}{\partial x_i}(a)$ dans la base can.

IV. Accroissements finis

Ω ouvert de E de dim finie ($\mathbb{R}^n$...), $f:\Omega\to F$ de dim finie ($\mathbb{R}^p$...)

Supp f $\mathscr{C}^1$, $(a,b)\in\Omega^2$ tq $[a,b]\subset\Omega$ Alors $f(b)-f(a)=\int_0^1 df_{(1-t)a+tb}(b-a)dt$

Si E est euclidien : $f(b)-f(a)=\int_0^1 \vec{\nabla} f((1-t)a+tb)\cdot\overrightarrow{b-a}\,dt$

Mêmes hypothèses : $\|f(b)-f(a)\|\leq\|b-a\|\sup\limits_{t\in[0,1]}\left\|df_{(1-t)a+tb}\right\|$

f $\mathscr{C}^1$ sur $\Omega\Rightarrow$ localement lipschitzienne sur Ω

Ω connexe, df identiquement nulle sur $\Omega\Rightarrow f$ constante

f $\mathscr{C}^1$ à but <u>*réel*</u> $\Rightarrow\exists\theta\in[0,1]$ tq $f(b)-f(a)=df_{(1-\theta)a+\theta b}(b-a)$

Utile : Montrer une inégalité entre $f(a_i)_i+f(b_i)_i$ et $f(a_i+b_i)_i\rightarrow$ Différentielle, AF

V. Difféomorphisme, inversion locale

Ω,Ω' ouverts de E,F evn. $f:\Omega\rightarrow\Omega'$ est un $\mathscr{C}^1-$difféomorphisme lorsque :

1) f est de classe $\mathscr{C}^1$ 2) f réalise une bijection de Ω sur Ω' 3) f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^1$

1) et 2) ne suffisent pas : $f:x\mapsto x^3$, f^{-1} non $\mathscr{C}^1$

Les $\mathscr{C}^1-$difféo se composent et s'inversent.

$f:\Omega\mapsto\Omega'$ est un $\mathscr{C}^1-$difféo $(\Omega\neq\varnothing)\Rightarrow E$ et F sont isomorphes $(df^{-1}_{f(a)}\circ df_a=Id_E...)$

$\Rightarrow$ En dim finie, $\dim E=\dim F$ Si $E=F=\mathbb{R}^n$, $\forall a\in\Omega$, $DJ_f(a)\neq 0$

E,F de dim finie

$^{//HP//}$Inversion locale globale : Ω ouvert de E, $f\in\mathscr{C}^1(\Omega,F)$, $a\in\Omega$. Supp $df_a\in Isom(E,F)$.

Alors il existe un voisinage ouvert $U\subset\Omega$ de a, et un voisinage ouvert V de $b=f(a)$

tel que $f(U)=V$ et f induise un $\mathscr{C}^1-$difféo de U sur V

Pour $\mathbb{R}^n$, la condition devient $DJ_f(a)\neq 0$

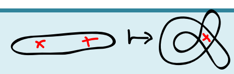
$^{(I)}$ $^{//HP//}$ Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f\in\mathscr{C}^1(\Omega,\mathbb{R}^n)$. Si $\forall a\in\Omega, DJ_f(a)\neq 0$, f est une application ouverte

Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$, f bij de Ω sur $\Omega'=f(\Omega)$. Si f est $\mathscr{C}^1$ et $\forall a\in\Omega$, $DJ_f(a)\neq 0$,

alors f est un $\mathscr{C}^1-$difféo de Ω sur Ω' et Ω' est ouvert

Seul le dernier corollaire est au programme : il redonne l'inversion locale

Mq f loc. inj : r tq $\forall x\in\overline{B}(0,r)$, $\|df_x-Id_E\|\leq 1/2...$

Problème de la réciproque : il peut y avoir plusieurs réciproques locales 

Changement de variable φ dans les intégrales multiples : Si $\Delta=\varphi(D)$, $\int_\Delta f=\int_D\tilde{f}\,|\,DJ_\varphi\,|...$

Points isolés : inversion locale + méthode variationnelle

$f:\mathbb{R}^n\rightarrow\mathbb{R}^n$ $\mathscr{C}^1$ tq : $\forall(x,y),\|f(x)-f(x)\|\geq\|x-y\|\Rightarrow f$ $\mathscr{C}^1-$difféo de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$

Surj. de $f : X \to Y$: $f(X)$ ou bien classes à droites $\to$ ouvert, fermé + connexité

VI. Dérivées partielles d'ordre supérieur

Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$, F evn, $f : \Omega \to F$

On définit les dérivées partielles successives (si elles existent) par réc. : $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} = \dfrac{\partial}{\partial x_{i_1}}\left(\dfrac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}}\right) = f^{(k)}_{x_{i_1} \dots x_{i_k}}$

f est de classe $\mathcal{C}^k$ lorsqu'elle admet des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre k

$\mathcal{C}^k(\Omega, F) = \{f : \Omega \mapsto F$ de classe $\mathcal{C}^k\}$ est un $\mathbb{R}-$ev et une $\mathbb{R}-$algèbre si $F = \mathbb{R}$, stable par composition

Si $f : \Omega \to \Omega'$ est un $\mathcal{C}^1-$difféo de classe $\mathcal{C}^k$, alors f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^k$ (Rec : jacobiens et comatrice)

Schwarz : Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω, $\forall a \in \Omega$, $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$

Traduction : si $k \geq 2$, les opérateurs $\dfrac{\partial}{\partial x_i} : \mathcal{C}^k(\Omega, F) \mapsto \mathcal{C}^{k-1}(\Omega, F)$ commutent $\qquad \mathcal{C}^\infty(\Omega, F) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^k(\Omega, F)$

Pour $n = 2$, en $(0,0)$ IAF avec $\Delta(x,y) = f(x,y) - f(x,0) - f(0,y) + f(0,0) - xy\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$, majoré par $\varepsilon |xy|$, idem $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

F evn de dim finie, $f \in \mathcal{C}^2(\Omega, F)$

$F = \mathbb{R}$. La hessienne de f en x est : $H_f(x) = \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right)_{i,j}$

Taylor : $\varphi(t) = f(a+th)$ est défini et $\mathcal{C}^2$ au vois. de 0. $\varphi''(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_i h_j \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a+th) = {}^t\begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} H_f(a) \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$ si $F = \mathbb{R}$

$(a,h) \in \Omega \times E$ tq $[a, a+h] \subset \Omega \Rightarrow f(a+th) - f(a) - df_a(h) = \displaystyle\sum_{i,j \in [\![1,n]\!]} \left(\int_0^1 \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a+th)dt\right) h_i h_j$

$F = \mathbb{R} \quad f(a+h) = f(a) + df_a(h) + \dfrac{1}{2}\,{}^t h H_f(a) h + o(\|h\|^2)$ (exacte pour poly de deg ≤ 2)

Equations aux dérivées partielles $\to$ Changements de variable, jacobienne...

Coordonnées polaires : $U : (r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$ $\quad J_U(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$ $\quad DJ_U(r,\theta) = r$

$\to$ Inversion locale sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ $\quad \Omega =]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[$, U est un $\mathcal{C}^1-$difféo de Ω sur $X = \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}^- \times \{0\})$

Ω' ouvert de X, $f \in \mathcal{C}^1(\Omega', \mathbb{R})$, $g = f \circ U$ $\quad \dfrac{\partial g}{\partial r} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \dfrac{\partial f}{\partial y}\sin\theta$, $\quad \dfrac{\partial g}{\partial \theta} = -\dfrac{\partial f}{\partial x} r\sin\theta + \dfrac{\partial f}{\partial y} r\cos\theta$

Gradient : $\vec{\nabla} f = \dfrac{\partial g}{\partial r}\vec{u_r}(\theta) + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial g}{\partial \theta}\vec{u_\theta}(\theta)$ $\qquad$ Laplacien : $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial g}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$

Coordonnées sphériques : $f : (r\theta, \varphi) \mapsto (r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)$ $\quad DJ_f(r,\theta,\varphi) = r^2\sin\theta$

$J_f(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\sin\theta \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$ f $\mathcal{C}^1-$difféo de $]0, +\infty[\times]0, \pi[\times]-\pi, \pi[$ sur $\mathbb{R}^3 \setminus (\mathbb{R}^- \times \{0\} \times \mathbb{R})$

$\displaystyle\iint_\Delta f(x,y)dxdy = \iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr d\theta$ $\qquad \displaystyle\iiint_\Delta f(x,y,z)dxdydz = \iiint_D \tilde{f}(r,\theta,\varphi) r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$