Chap 20 : Familles sommables

I. Famille à termes positifs

$\mathcal{P}_F(I)=\{$parties finies de $I\}$ $(a_i)_{i\in I}\in\mathbb{R}_+{}^I$ est sommable lorsque les sommes $\sum_{i\in J} a_i, J\in\mathcal{P}_F(I)$ sont majorées.

Dans ce cas, la somme de $(a_i)_{i\in I}$ est $\sum_{i\in I} a_i = \sup_{J\in\mathcal{P}_F(I)} \sum_{i\in J} a_i$

$(a_n)_n\in\mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ est sommable *ssi* la série $\sum a_n$ converge, et dans ce cas $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$

Si $(a_i)\in\mathbb{R}_+^I$ est sommable, $\{i\in I\,/\,a_i\neq 0\}$ est dénombrable ($I_p=\{i\in I\,/\,a_i\geq 1/p\}$ finis $\Rightarrow \bigcup I_p$ den)

On suppose désormais I dénombrable.

Soit $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite croissante de parties finies de I telles que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n=I$ (suite exhaustive)

$(a_i)_{i\in I}\in\mathbb{R}_+^I$ sommable $\Leftrightarrow \left(\sum_{i\in J_n} a_i\right)_n$ est majorée, et dans ce cas $\sum_{i\in I} a_i=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i\in J_n} a_i$

$(a_i),(b_i)\in\mathbb{R}_+^I$ Si $\forall i\in I, a_i\leq b_i$, $((b_i)$ somm. $\Rightarrow (a_i)$ somm.) $((a_i)$ non somm. $\Rightarrow (b_i)$ non somm.)

$\lambda,\mu\in\mathbb{R}^+, (a_i)$ et (b_i) sommables $\Rightarrow (\lambda a_i+\mu b_i)$ l'est et $\sum_{i\in I}(\lambda a_i+\mu b_i)=\lambda\sum_{i\in I} a_i+\mu\sum_{i\in I} b_i$

$(a_i)_{i\in I}\in\mathbb{R}_+^I, (I_p)_{p\in\mathbb{N}}$ partition de I. (a_i) sommable $\Leftrightarrow$ Chacune des familles $(a_i)_{i\in I_p}$ est sommable de somme A_p et $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est sommable. Dans ce cas, $\sum_{i\in I} a_i=\sum_{p=0}^{+\infty} A_p$

Méthode pour vérifier une sommabilité : (Partition, Estimation, Conclusion) des sommes partielles

II. Familles à termes complexes

$(a_i)_{i\in I}\in\mathbb{C}^I$. $(a_i)_{i\in I}$ est sommable lorsque $(|a_i|)_{i\in I}$ est sommable

Sous-familles, Domination, Calcul de la somme à l'aide d'une suite exhaustive, Combinaison linéaire

$(a_i)_{i\in I}$ est sommable, $\mathrm{Re}(a_i)^+,\mathrm{Re}(a_i)^-,\mathrm{Im}(a_i)^+,\mathrm{Im}(a_i)^-$ le sont, et $\sum_{i\in I} a_i=\sum x_i^+-\sum x_i^-+\mathcal{I}(\sum y_i^+-\sum y_i^-)$

$(a_i)_{i\in I}\in\mathbb{C}^I$, $(I_p)_{p\in\mathbb{N}}$ partition de I. (a_i) est sommable $\Leftrightarrow$ Chacune des sous familles $(a_i)_{i\in I_p}$ est sommable et, si $\tilde{A}_p$ est somme de $(|a_i|)_{i\in I_p}$, $\sum \tilde{A}_p$ converge. Dans ce cas, $\sum_{i\in I} a_i=\sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{i\in I_p} a_i\right)$

III. Applications

$(a_n),(b_p)\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ sommables. Alors : – (produit) $(a_n b_p)$ est sommable de somme $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{p=0}^{+\infty} b_p\right)$

– (convolution/prod de Cauchy) $(c_n)_n=(a_n)_n\star(b_n)_n=\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)$ est sommable de somme $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{p=0}^{+\infty} b_p\right)$

– (Fubini) $(z_{mn}) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^2}$, si $\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{m\in\mathbb{N}} |z_{mn}|\right)$ converge, alors $\sum_{m\in\mathbb{N}}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |z_{mn}|\right)$ aussi

et les séries de termes général $\left(n \mapsto \sum_{m=0}^{+\infty} z_{mn}\right)$ et $\left(m \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} z_{mn}\right)$ convergent de même somme

$\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{m\in\mathbb{N}} |z_{mn}|\right) = \sum_{m\in\mathbb{N}}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |z_{mn}|\right)$ sous réserve de la CV de l'une des séries partielles pour $|z_{np}|$