Chap 1 : Espaces vectoriels normés

Inégalités classiques

Cauchy-Schwarz : $\forall((u_i)_i,(v_i)_i)\in(\mathbb{C}^n)^2$ $\quad \left|\sum_{i=1}^n u_i v_i\right| \le \left(\sum_{i=1}^n |u_i|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^n |v_i|^2\right)^{1/2}$ $\quad (\Sigma x_i^2)(\Sigma y_i^2)-(\Sigma x_i y_i)^2 \ge 0$

Minkowski (I) : $\forall((u_i)_i,(v_i)_i)\in(\mathbb{C}^n)^2$ $\quad \left(\sum_{i=1}^n |u_i+v_i|^2\right)^{1/2} \le \left(\sum_{i=1}^n |u_i|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^n |v_i|^2\right)^{1/2}$ $\quad$ (mettre $^2 + CS$)

$\max\limits_{(x_i)_i\in[0,1]^n} \sum\limits_{i\neq j} x_i x_j = 1-\frac{1}{n}$ $\qquad (\sum x_i)^2 = 1 = \sum x_i x_j,\ y_i = 1 \Rightarrow 1 \le \sum x_i y_i \le \sqrt{\sum x_i^2}\sqrt{n}$

$\forall(p,q)\in]1;+\infty[^2$ tq $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}_+{}^2$, $\qquad \alpha\beta \le \frac{1}{p}\alpha^p + \frac{1}{q}\beta^q$

Holdër : $(p,q)\in]1;+\infty[^2$ tq $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

$\forall((u_i)_i,(v_i)_i)\in(\mathbb{C}^n)^2$ $\quad \left|\sum_{i=1}^n u_i v_i\right| \le \left(\sum_{i=1}^n |u_i|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^n |v_i|^q\right)^{1/q}$ $\quad$ (lemme $\uparrow$ sur $\frac{x_i}{(\sum(x_i^p))^{1/p}}\ \frac{y_i}{(\sum(x_i^q))^{1/q}}$)

$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, S=\left\{(y_i)_i\in\mathbb{R}_+{}^n \,/\, \sum_{i=1}^n y_i^q = 1\right\}$ $\qquad (x_i)_i\in\mathbb{R}_+{}^n \Rightarrow \max\limits_{(y_i)_i\in S}\sum_{i=1}^n x_i y_i = \left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{1/p}$ $\quad \left(y_i = \frac{x_i}{(\sum x_i{}^p)^{1/q}}\right)$

Minkowski (II) : $p\in]1;+\infty[$ $\quad \forall((u_i)_i,(v_i)_i)\in(\mathbb{C}^n)^2$ $\quad \left(\sum_{i=1}^n |u_i+v_i|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{i=1}^n |u_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n |v_i|^p\right)^{1/p}$

Inégalité arithmético-géométrique : $\forall(x_1...x_n)\in\mathbb{R}_+{}^n$, $\sqrt[n]{x_1...x_n} \le \frac{1}{n}(x_1+...+x_n)$

I. Normes

E est un $\mathbb{K}-ev$ avec $E=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Une norme sur E est une application $N:E\to\mathbb{R}_+$ vérifiant :

(N_1) $\quad \forall x\in E,$ $\quad N(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ $\quad$ (séparation)

(N_2) $\quad \forall x\in E, \forall\lambda\in\mathbb{K},$ $\quad N(\lambda x)=|\lambda|N(x)$

(N_3) $\quad \forall(x,y)\in E^2$ $\quad N(x+y)\le N(x)+N(y)$ $\quad$ (sous-additivité / inégalité triangulaire)

(E,N) est alors un espace vectoriel normé (evn)

Une application $p:E\to\mathbb{R}_+$ vérifiant (N_1) et (N_2) est une semi-norme

* Convexité : $\forall\lambda\in[0,1], \forall(x,y)\in E^2$ $\quad N(\lambda x+(1-\lambda)y)\le\lambda N(x)+(1-\lambda)N(y)$

* $\forall(x,y)\in E^2, |N(x)-N(y)|\le N(x-y)$ $\qquad N$ est $1-$lipschitzienne pour elle-même

* Sur la droite $\mathbb{K}x$, il y a 2 vecteurs normés si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, une infinité si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ (cercle unité)

Sur $\mathcal{C}_{pm}([a,b],\mathbb{C}), a<b$ $\qquad \|f\|_1=\int_a^b|f|$ (CV en moyenne) $\qquad \|f\|_2=\left(\int_a^b|f|^2\right)^{1/2}$ (CV en moyenne quad)

$\|\ \|_1$ et $\|\ \|_2$ sont des semi-normes sur $\mathcal{C}_{pm}([a,b],\mathbb{C})$, ce sont des normes sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$

Une distance sur X (ensemble) est une application $d : X^2 \to \mathbb{R}_+$ vérifiant :

(d_1) $\forall (x,y) \in X^2$ $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(d_2) $\forall (x,y) \in X^2$ $d(x,y) = d(y,x)$

(d_3) $\forall (x,y,z) \in X^3$ $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

(X,d) est alors un espace métrique

II. Boules, sphères, parties bornées

$(E, \| \ \|)$ evn. Sur E^2, on pose $d(x,y) = \|x - y\|$ (X,d) espace métrique

Soient $(a,r) \in E \times \mathbb{R}_+$

(i) $r > 0$ La boule ouverte de centre a et de rayon r : $\mathcal{B}(a,r) = \{x \in E \,/\, d(a,x) < r\}$

(ii) La boule fermée de centre a et de rayon r : $\overline{\mathcal{B}}(a,r) = \{x \in E \,/\, d(a,x) \leq r\}$

(iii) La sphère de centre a et de rayon r : $S(a,r) = \{x \in E \,/\, d(a,x) = r\}$

Soit $A \subset X$. On a équivalence entre :

(1) Il existe une boule ouverte $\mathcal{B}(a,R)$ de X qui contient A

(2) $\forall a \in X, \exists R > 0$ tq $A \subset \mathcal{B}(a,R)$

(3) $\{d(x,y\} / (x,y) \in A^2\}$ est borné

On dit alors que A est une partie bornée de X

Diamètre d'une partie bornée A de X : $diam(A) = d(A) = \sup\limits_{(x,y)\in A^2} d(x,y) \in \mathbb{R}_+$ $diam(\varnothing) = 0$

La notion de borné dépend de la norme en dimension infinie

III. Fonctions bornées, lispschitziennes

X ensemble, E evn. Une fonction $f : X \to E$ est bornée si : $\exists M > 0$ tq $\forall x \in X$, $\|f(x)\| \leq M$

On pose $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in X} \|f(x)\|$

$$E = \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} f \text{ maj : } \exists M \in \mathbb{R} \,/\, \forall x \in X,\, f(x) \leq M \\ f \text{ bornée} \Leftrightarrow f \text{ maj et min} \end{cases}$$

$(x_n)_n$ est bornée si $\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N},\ x_n \leq M$

Si $(x_n)_n$ non bornée, $\exists \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ st^t croissante tq $\|x_{\varphi(n)}\| \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$

En dimension infinie, la notion de convergence dépend de la norme

$A \subset (E, \| \ \|_E)$ evn, $(F, \| \ \|_F)$ evn. $f : A \to F$ est $k-$lispschitzienne si

$\forall (x,y) \in A^2, \|f(x) - f(y)\|_F \leq k\|x - y\|_E$ k est le rapport de Lispschitz de f

IV. Convergence des suites dans un evn

$(E, \| \ \|)$ evn

$(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ converge lorsqu'il existe $l \in E$ tel que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_\epsilon,\ \|x_n - l\| \leq \varepsilon$

(x_n) CV vers $l \Leftrightarrow (\|x_n - l\|)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 dans $\mathbb{R}$

La limite est unique, si elle existe : on la note $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$

Une suite convergente est bornée. La limite suit les combinaisons linéaires.

$\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Une algèbre $(A,+,\cdot,\star)$ est telle que $(A,+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}-ev$
$\star$ est une application bilinéaire de $A\times A$ vers A

$i.e: \forall x\in A, y\mapsto x\star y$ est linéaire, $y\mapsto y\star x$ aussi, et $\star$ se développe comme un produit (non comm.)

L'algèbre est commutative si $\star$ l'est, associative si $\star$ l'est, unitaire si $\star$ admet un élément neutre

$(A,\|\ \|)$ est une algèbre normée si $(A,\|\ \|)$ est un evn et : $\forall(x,y)\in A^2, \|x\star y\|\le\|x\|\|y\|$ $\quad(\Rightarrow \|x^n\|\le\|x\|^n)$

$\mathcal{B}(X,\mathbb{K})=\{f\in\mathcal{F}(X,\mathbb{K})$ bornée$\}$ munie des lois naturelles et de $\|\ \|_\infty$

A algèbre normée. $((x_n)_n,(y_n)_n)\in(A^n)^2$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=l$, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n=l\Rightarrow x_n\star y_n$ converge vers $l\star l'$

V. Convergence dans les espaces de fonctions

X ensemble, E evn

$(f_n)_n\in\mathcal{F}(X,E)^{\mathbb{N}}$ converge simplement si, $\forall x\in X$, $(f_n(x))_n$ converge

$$f\begin{cases}X\to E\\ x\mapsto \lim\limits_{n\to+\infty} f(x)\end{cases}$$ est la limite simple de $(f_n)_n$

Convergence simple $\Leftrightarrow \forall x\in X, \forall\varepsilon>0, \exists n_{x,\varepsilon}\in\mathbb{N}/\ \ \forall n\ge n_{x,\varepsilon}, \|f_n(x)-f(x)\|\le\varepsilon$

$(f_n)_n\in\mathcal{F}(X,E)^{\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f lorsque :

$$\forall\varepsilon>0,\exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}/\quad \forall n\ge n_\varepsilon, \forall x\in X, \|f_n(x)-f(x)\|\le\varepsilon\quad (\Leftrightarrow \sup_{x\in X}\|f_n(x)-f(x)\|\le\varepsilon)$$

La convergence uniforme implique la convergence simple. La réciproque est FAUSSE

$$f_n\xrightarrow{CVU} f\Leftrightarrow\begin{cases}f_n-f \text{ bornée à partir d'un certain rang}\\ \|f_n-f\|_\infty\to 0\end{cases}$$

$(f_n)_n\in\mathcal{C}([a,b],\mathbb{C})^{\mathbb{N}}$ converge en moyenne vers $f\in\mathcal{C}([a,b],\mathbb{C})$ lorsque : $\|f_n-f\|_1\to0\Leftrightarrow\int_a^b|f_n-f|\to0$

$(f_n)_n\in\mathcal{C}([a,b],\mathbb{C})^{\mathbb{N}}$ converge en moyenne quadratique vers f lorsque : $\|f_n-f\|_2\to0\Leftrightarrow\left(\int_a^b|f_n-f|^2\right)^{1/2}\to0$

Ces notions sont distinctes : $CVU\Rightarrow CVMQ\Rightarrow CVM$ mais l'inverse est faux

Césaro : $(x_n)_n\in E^{\mathbb{N}}\to l\in\overline{\mathbb{R}}$, $(\alpha_k)_k\in(\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ tq $(\alpha_k)_k\to+\infty\Rightarrow(y_n)_n=\left(\left(\sum_{k=1}^n\alpha_kx_k\right)/\left(\sum_{k=1}^n\alpha_k\right)\right)_n$ CV vers l

$f\in\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}), I_n=\int_a^b f^n\Rightarrow\frac{I_{n+1}}{I_n}\sim\sqrt[n]{I_n}\to\|f\|_\infty$ $\qquad \int f^{n^2}\le(\int f^{n-1})(\int f^{n+1})\Rightarrow\frac{I_{n+1}}{I_n}\nearrow\le\|f\|_\infty$

ln + Cesaro $\to$ mm lim, $\sqrt[n]{I_n}\le M(b-a)^{1/n}\to M$

$u_{n+m}\le u_n+u_m\Rightarrow\frac{u_n}{n}$ CV dans $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ $\qquad$ Div euclid, $l=\inf\limits_{p\in\mathbb{N}^*}\frac{u_p}{p}$

VI. Extractions, valeurs d'adhérence

Un extraction est une application $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ strictement croissante

La composée de 2 extractions est une extraction. Si φ extraction, $\forall n\in\mathbb{N},\varphi(n)\geq n$

A partie infinie de $\mathbb{N}$. Il existe φ extraction telle que $A=\varphi(\mathbb{N})$

$\varphi(0)=\min A \quad \varphi(n)=\min(A\setminus\{\varphi(0)...\varphi(n-1)\})$ $\qquad$ φ surj : p.absurde : $a\in A\setminus\varphi(\mathbb{N})\Rightarrow a=\infty$

X un ensemble

$v\in X^{\mathbb{N}}$ est extraite de $u\in X^{\mathbb{N}}$ s'il existe $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ strictement croissante tq : $\forall n\in\mathbb{N},v_n=u_{\varphi(n)}$

u non majorée $\Leftrightarrow\exists\varphi$ extraction tq $u_{\varphi(n)}$ strictement croissante $\to+\infty$

$u\not\to 0\Leftrightarrow\exists\varepsilon>0,\ \varphi$ extraction tq $\forall n,u_{\varphi(n)}\geq\varepsilon$

//HP// Procédé diagonal : (apcr = à partir d'un certain rang)

$(\varphi_k)_k$ famille d'extractions. $\exists\varphi$ extraction tq φ soit extraite apcr de TOUTES les extractions $\varphi_0\circ...\circ\varphi_p$

$i.e\ \forall p\in\mathbb{N},\ \exists N_p\in\mathbb{N},\ \exists\psi_p$ extraction tq $\forall n\geq N_p,\ \varphi(n)=(\varphi_0\circ...\circ\varphi_p)\circ\psi_p(n)$

par exemple : $\varphi:n\mapsto\varphi_0\circ...\circ\varphi_n(n)$

VII. Valeurs d'adhérence

$u\in E^{\mathbb{N}},a\in A$. On a équivalence entre :

- $\forall\varepsilon>0,\forall N\in\mathbb{N},\exists n\geq N/\quad\|u_n-a\|\leq\varepsilon$
- $\forall\varepsilon>0,\ \{n\in\mathbb{N}/\|u_n-a\|\leq\varepsilon\}$ est infini
- $\exists\varphi$ extraction tq $(u_{\varphi(n)})_n$ converge en a

a est alors appelée valeur d'adhérence de u

Si $(u_n)_n$ converge vers l, l est l'unique valeur d'adhérence de $(u_n)_n$

$(u_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ possède au moins une sous-suite monotone

Preuve : $A=\{n\in\mathbb{N}/\forall k\geq n,u_k\leq u_n\}$ Si ∞, $A=\varphi(\mathbb{N})$ avec φ extraction. Si fini, A maj $\Rightarrow$con str par rec

Bolzano-Weierstrass : Toute suite réelle bornée possède au moins une valeur d'adhérence

Toute suite réelle possède une valeur d'adhérence dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Toute suite complexe bornée possède au moins une valeur d'adhérence. Idem pour $\mathbb{R}^p$

$(u_n)_n$ suite réelle bornée. $(u_n)_n$ converge $\Leftrightarrow(u_n)_n$ possède AU PLUS une valeur d'adhérence

Preuve : $\Leftarrow(u_n)$ non CV vers a unique $v.a.\Rightarrow(u_{\varphi(n)})$ tq $\forall n,\|u_{\varphi(a)}-a\|\geq\varepsilon\Rightarrow$bornée+BW $\Rightarrow 2^e$ v.a $\neq$

VIII. Suites de Cauchy

$(E,\|\ \|)$ evn. $u\in E^{\mathbb{N}}$ est de Cauchy si : $\forall\varepsilon>0,\exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}/\forall(m,n)\in\mathbb{N}^2,(m\geq n_\varepsilon$ et $n\geq n_\varepsilon\Rightarrow\|u_n-u_m\|\leq\varepsilon)$

Toute suite convergente est de Cauchy. Toute suite de Cauchy est bornée.

$u \in E^{\mathbb{N}}$ de Cauchy. u convergente $\Leftrightarrow u$ possède au moins une valeur d'adhérence

L'evn $(E,\|\ \|)$ est complet si toute suite de Cauchy converge

$\mathbb{R},\mathbb{C},(\mathbb{R}^n,\|\ \|_\infty)$ sont complets

IX. Suites récurrentes réelles

$$u_{n+1}=f(u_n)\Rightarrow\begin{cases}\text{Si } f \nearrow,\ (u_n) \text{ est monotone}\\ \text{Si } f \searrow,\ f\circ f \nearrow \text{ et } (u_{2n}),\ (u_{2n+1}) \text{ sont monotones}\end{cases}$$

$A\subset(E,\|\ \|)$ $f:A\to E$ est strictement contractante si : $\exists k\in]0,1[,\ \forall(x,y)\in A^2,\|f(x)-f(y)\|\le k\|x-y\|$

Si $f:[a,b]\to[a,b]$ est strictement contractante, $\exists! l\in[a,b]$ tq $f(l)=l$

De plus, toute suite $(u_n)_n\in\mathbb{R}^n$ telle que $\begin{cases}u_0\in[a,b]\\ u_{n+1}=f(u_n)\end{cases}$ est correctement définie et converge vers l

Preuve : $g=f-Id$ + TVI. $|u_{n+1}-l|\,|\,f(u_n)-f(l)|\le k|u_n-l|\le k^{n+1}|u_0-l|$

I intervalle de $\mathbb{R}$. $f\in\mathcal{C}^1(I,I)$

$^{//HP//}$Points attractifs, répulsifs : l point fixe de f. On dit que l est :

- attractif si $|f'(l)|<1$
- neutre si $|f'(l)|=1$
- répulsif si $|f'(l)|>1$

$\Rightarrow$ (i) Si l est attractif, $\exists\alpha>0$ tq $J=[l-\alpha;l+\alpha]\cap I$ soit stable par f

Pour toute suite u telle que $u_0\in J$ et $u_{n+1}=f(u_n)$, u converge vers l

(ii) Si l est répulsif et si $u\in I^{\mathbb{N}}$ vérifie $(\forall n, u_{n+1}=f(u_n)$ et $(u_n)\to l)$, la suite u est stationnaire

Preuve : $i)k$ tq $|f'(l)|<k<1.\ f\ \mathcal{C}^1\Rightarrow\exists J/\forall x\in J,|f(x)-f(l)|\underset{EAF}{=}|f'(\underset{\in J}{c})|\,|x-l|\le k\alpha$

$ii)ABS:\forall n,u_n\ne l,\left|\dfrac{u_{n+1}-l}{u_n-l}\right|\to|f'(l)|.k$ tq $|f'(l)|>k>1$. Pour n grand : $\left|\dfrac{u_{n+1}-l}{u_n-l}\right|\ge k\Rightarrow|u_{n+p}-l|\to+\infty$

Techniques utiles :

Pour avoir un équivalent d'une suite $u_{n+1}=f(u_n)$, chercher α tel que $\dfrac{1}{u_{n+1}{}^{\alpha}}-\dfrac{1}{u_n{}^{\alpha}}$ converge

Pour étudier une expression du type $|z^{n+1}-z^n|$, penser à diviser par $|z^n|$...