# Chap 6 : Arcs Paramétrés

$\mathcal{P}$ plan affine euclidien muni d'un RON $(O,\vec{i},\vec{j})$

## I. Fonctions à valeurs vectorielles

$f\begin{cases} F \to \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto f(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \end{cases}$ $\quad \lim\limits_{t\to a} f(t) = l \Leftrightarrow \lim\limits_{t\to a} \| f(t) - l \| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{t\to a} x(t) = l_1 \\ \lim\limits_{t\to a} y(t) = l_2 \end{cases}$ où $l\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix}$

$f$ est continue en $a$ si $\lim\limits_{t\to a} f(t) = f(a) \Leftrightarrow x$ et $y$ sont continues en $a$

$f$ est dérivable en $a$ si $g\begin{cases} I \setminus \{a\} & \to \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto \dfrac{f(t)-f(a)}{t-a} \end{cases}$ admet une limite $l$ en $a$. Dans ce cas, $f'(a) = l$

$\varphi\begin{cases} I \to \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto \langle \vec{f}(t) \mid \vec{g}(t) \rangle \end{cases}$ $\quad \varphi'(t) = \langle \vec{f}'(t) \mid \vec{g}(t) \rangle + \langle \vec{f}(t) \mid \vec{g}'(t) \rangle$ (idem pour det)

$\Rightarrow \psi : t \mapsto \left\| \vec{f}(t) \right\|^2 \quad \psi' = 2\vec{f}' \cdot \vec{f} \quad \Rightarrow \psi_0 = \sqrt{\psi} : t \mapsto \left\| \vec{f}(t) \right\| \quad \psi_0' = \dfrac{\vec{f}' \cdot \vec{f}}{\left\| \vec{f} \right\|}$

## II. Courbes paramétrées

Arc paramétré : donnée d'un couple $(I, \vec{f})$ avec $I$ intervalle de $\mathbb{R}$ et $\vec{f} : I \to \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$ Application $\gamma\begin{cases} I \to \mathcal{P} \\ t \mapsto M(t) \text{ tq } \overrightarrow{OM}(t) = \vec{f}(t) \end{cases}$

Support de l'arc paramétré : $\Gamma = \{M(t), t \in I\}$ (NE PAS CONFONDRE L'ARC ET SON SUPPORT)

Point $M(t_0)$ régulier si $\vec{f}'(t_0) \neq 0$ (singulier sinon)

Si régulier en $M(t_0)$ : la courbe admet une tangente en $M(t_0)$ dirigée par $\vec{f}(t_0)$

**Preuve** : passer par $\vec{f}(t_0+h) = \vec{f}(t_0) + h \cdot \vec{f}(t_0) + h\vec{\varepsilon}(t)$ $\quad \vec{\varepsilon}(t) \xrightarrow[t\to t_0]{} \vec{0}$, définir N(h) avec ça, sans $\varepsilon$

Interprétation cinématique : $M(t)$ représente la position de $M$ au temps $t$

Le support $\Gamma$ est la trajectoire du point $M$

$\vec{v}(t) = \vec{f}'(t) = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t)$ est le vecteur vitesse à l'instant $t$ $\quad$ ($\left\| \vec{f}'(t) \right\|$ est la vitesse)

Si $\vec{f} \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R}^2)$, $\vec{f}''(t) = \dfrac{d\vec{v}}{dt}(t) = \dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}(t) = \vec{a}(t)$ est l'accélération du point $M$ à l'instant $t$

## III. Etude d'un arc paramétré

### 1. Trouver et restreindre l'intervalle d'étude

Chercher une périodicité, une parité.

| | | |
|---|---|---|
| x et y impairs : symétrie centrale | x pair, y impair : sym/$(Ox)$ | x et y pairs : $M(t) = M(-t)$ |

## 2. Etudier les variations

Points singuliers, limites, valeurs particulières

## 3. Branches infinies

**a)** $x(t)\xrightarrow[t\to a]{}\infty$ $\qquad y(t)\xrightarrow[t\to a]{} l$

Asymptote horizontale

(Asymptote verticale si y et x sont intervertis)

**b)** $x(t)\to\infty \qquad y(t)\to\infty$

Si $\dfrac{y(t)}{x(t)}\to\infty$ : Branche parabolique de direction (Oy)

Si $\dfrac{y(t)}{x(t)}\to 0$ : Branche parabolique de direction (Ox)

Si $\dfrac{y(t)}{x(t)}\to\alpha\in\mathbb{R}$ :

- Si $\lim\limits_{t\to a}(y(t)-\alpha x(t))=\beta\in\mathbb{R}$ : asymptote : $\Delta : y=\alpha x+\beta$
- Si $\lim\limits_{t\to a}(y(t)-\alpha x(t))=\infty$ : branche parabolique de direction $y=\alpha x$
- Sinon (pas de limite), on ne peut rien dire

Sinon, on ne peut rien dire

**Position par rapport à l'asymptote** : signe de $x(t)-l$ ou $y(t)-\alpha x(t)-\beta$

## 4. Points multiples

Résoudre $\begin{cases} x(t_1)=x(t_2) \\ y(t_1)=y(t_2) \end{cases}$

## 5. Points particuliers

On les places avec leur vecteur tangent $\vec{T}=\vec{f}\,'(t_0)$

Tangente : $\begin{vmatrix} x-x(t_0) & x'(t_0) \\ y-y(t_0) & y'(t_0) \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow y'(t_0)x-x'(t_0)y-x(t_0)y'(t_0)+y(t_0)x'(t_0)=0$

## 6. Points singuliers

On remonte à la première dérivée n-ième qui n'est pas nulle.

$$\overrightarrow{OM}(t_0+h)=\overrightarrow{OM}(t_0)+\frac{h^n}{n!}\vec{f}^{(n)}(t_0)+h^n\vec{\varepsilon}(h)$$

(pour n pair, c'est un point de rebroussement)

## 7. On trace

# IV. Coordonnées polaires

$$\varphi\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2\\ \theta\mapsto\overrightarrow{u_\theta}=\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}\end{cases}\qquad \psi\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ \theta\mapsto\overrightarrow{v_\theta}=\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}\end{cases}\qquad \varphi'=\psi\qquad \overrightarrow{u'_{\theta(t)}}=\theta'(t)\overrightarrow{v_{\theta(t)}}$$

Pour un arc défini en coordonnées polaires par $\theta(t)$ et $\rho(t)$

$\vec{u}(t)=\rho(t)\overrightarrow{u_{\theta(t)}}$

$\vec{v}(t)=\vec{u}'(t)=\rho'(t)\overrightarrow{u_{\theta(t)}}+\rho(t)\theta'(t)\overrightarrow{v_{\theta(t)}}$

$\vec{a}(t)=\vec{v}'(t)=(\rho''(t)-\rho(t)(\theta'(t))^2)\overrightarrow{u_{\theta(t)}}+(2\rho'(t)\theta'(t)+\rho(t)\theta''(t))\overrightarrow{v_{\theta(t)}}$

Avec les fonctions : $\vec{u}=\rho\cdot\overrightarrow{u_\theta}$ $\quad\vec{v}=\vec{u}'=\rho'\cdot\overrightarrow{u_\theta}+\rho\cdot\theta'\cdot\overrightarrow{v_\theta}$ $\quad\vec{a}=\vec{v}'=(\rho''-\rho\cdot\theta'^2)\overrightarrow{u_\theta}+(2\rho'\cdot\theta'+\rho\cdot\theta'')\overrightarrow{v_\theta}$

Si on suppose $\theta(t)=t$

$\vec{u}(\theta)=\rho(\theta)\overrightarrow{u_\theta}$

$\vec{v}(\theta)=\rho'(\theta)\overrightarrow{u_\theta}+\rho(\theta)\overrightarrow{v_\theta}$

$\vec{a}(\theta)=(\rho''(\theta)-\rho(\theta))\overrightarrow{u_\theta}+2\rho'(\theta)\overrightarrow{v_\theta}$

## 1. Restriction de l'intervalle d'étude

**Périodicité : uniquement avec 2k$\pi$**

$\rho$ paire : symétrie $(Ox)$ $\qquad\rho$ impaire : $(Oy)$

$\rho(\theta+\pi)=-\rho(\theta):M(\theta)=M(\theta+\pi)$ $\qquad\rho(\theta+\pi)=\rho(\theta):O$

## 2. Variations

Point singulier : $\rho'(\theta)=\rho(\theta)=0$

## 3. Points multiples

$$M(\theta_1)=M(\theta_2)\Leftrightarrow\begin{cases}\theta_1\equiv\theta_2\ [2\pi]\\ \rho(\theta_1)=\rho(\theta_2)\end{cases}\quad\text{ou}\quad\begin{cases}\theta_1\equiv\theta_2+\pi\ [2\pi]\\ \rho(\theta_1)=-\rho(\theta_2)\end{cases}$$

## 4. Branches asymptotiques

$\rho(\theta)\xrightarrow[\theta\to a]{}\infty$

### a) $a=\infty$

On a une spirale

### b) $a\not\equiv 0\left[\dfrac{\pi}{2}\right]$

$$\frac{y(\theta)}{x(\theta)}=\tan\theta\to\tan a$$

On étudie $y(\theta)-\tan a\cdot x(\theta)=\dfrac{1}{\cos a}\rho(\theta)\sin(\theta-a)$

- Si $\dfrac{1}{\cos a}\rho(\theta)\sin(\theta-a)\to\beta\in\mathbb{R}$ : asymptote $y=\tan a\cdot x+\dfrac{\beta}{\cos a}$

- Si $\frac{1}{\cos a}\rho(\theta)\sin(\theta-a)\to\infty$ : branche parabolique de direction $y=\tan a\cdot x$

c) $a\equiv 0\left[\frac{\pi}{2}\right]$

On regarde si $x(\theta)\to\infty$ et $y(\theta)\to\infty$ Voir a)

## 5. Points singuliers

Si $\rho''(\theta_0)\neq 0$, tangente dirigée par $\overrightarrow{u_{\theta_0}}$

## 6. On trace

Points particuliers et vecteurs tangents.

Exemples importants :

Droite : $\rho(\theta)=\frac{d}{\cos(\theta-\alpha)}$

Cercle passant par $O$ : $\rho(\theta)=2R\cos(\theta-\alpha)$

Cardioïde : $\rho(\theta)=a(1=\cos\theta)$ $(\alpha>0)$