Chap 24 : Déterminants

Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique différente de 2

I. Formes n-linéaires alternées

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ $E_1 \dots E_n$ et F $n+1$ $\mathbb{K}-$espaces vectoriels

$f : \prod_{j=1}^{n} E_j \to F$ est application $n-$linéaire si elle est linéaire par rapport à chacune de ses variables

càd : $\forall j \in [\![1,n]\!],\ \forall (a_k)_{k\neq j}$ $\begin{cases} E_j \to F \\ x \mapsto f(a_1,\dots,a_{j-1},x,a_{j+1},\dots,a_n) \end{cases}$ est linéaire

On dit que f est une forme $n-$linéaire si $F = \mathbb{K}$

Exemple fondamental : $\forall j \in [\![1,n]\!],\ \varphi_j \in \mathcal{L}(E_j,\mathbb{K})$ $f \begin{cases} \prod_{j=1}^{n} E_j \to \mathbb{K} \\ (x_1 \dots x_n) \mapsto \prod_{j=1}^{n} \varphi_j(x_j) \end{cases}$ est une forme $n-$linéaire

On se place dans le cas où $E_1 = E_2 = \dots = E_n = E$

$f \in \mathcal{F}(E^n,\mathbb{K})$ forme $n-$linéaire. f est alternée si $\forall (a_1 \dots a_n) \in E^n,\ \forall j \neq k,\quad a_j = a_k \Rightarrow f(a_1 \dots a_n) = 0$

$f \in \mathcal{F}(E^n,\mathbb{K})$ forme $n-$linéaire. f est antisymétrique si $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n,\ f(a_{\sigma(1)} \dots a_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(a_1 \dots a_n)$

Si f est une forme $n-$linéaire sur E, si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on note $\sigma \bullet f \begin{cases} E^n \to \mathbb{K} \\ (x_1 \dots x_n) \mapsto f(x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(n)}) \end{cases}$

$\sigma \bullet f$ est toujours $n-$linéaire, et f antisymétrique *ssi* $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n,\ \sigma \bullet f = \varepsilon(\sigma) f$

f forme $n-$linéaire sur E, $(\sigma,\tau) \in \mathfrak{S}_n^{\ 2}$ $\tau \bullet (\sigma \bullet f) = (\tau \circ \sigma) \bullet f$

f forme $n-$linéaire f est antisymétrique *ssi* pour toute transposition $\tau \in \mathfrak{S}_n$, $\tau \bullet f = -f$

f forme $n-$linéaire f est antisymétrique *ssi* f est alternée

Preuve : Si f antisym, on prend $a_j = a_k$, on les permute, on a $f(a_1 \dots a_n) = -f(a_1 \dots a_n) \Rightarrow 0$

Si f alternée, on prend $a_k + a_j$ en k et en j, on développe (linéarité), on retrouve $\tau \bullet f = -f$

L'espace des formes $n-$linéaires sur E est un sous espace vectoriel de $\mathcal{F}(E^n,\mathbb{K})$

$\mathcal{A}^n(E,\mathbb{K}) = \{$formes $n-$linéaires aternées sur $E\}$ est un *sev* de l'espace des formes $n-$linéaires

E de dim n et de base $\mathcal{B}_0$ $\det_{\mathcal{B}_0} \begin{cases} E^n \to \mathbb{K} \\ (v_1 \dots v_n) \mapsto \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j)\,j} \quad (v_j = \sum_{j=1}^{n} a_{i\,j} e_i) \end{cases}$ engendre $\mathcal{A}^n(E,\mathbb{K})$ (de dim 1)

Preuve : $n-lin : f(v_1...v_n)=\sum_{(i_1...i_n)\in\mathbb{N}_n}\prod_{j=1}^{n}a_{i_j\,j}\,f(e_{i_1}...e_{i_n})\quad i_j=i_k\Rightarrow f(e_{i_1}...e_{i_n})=0\Rightarrow\sigma\in\mathfrak{S}_n$

$$f(v_1...v_n)=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\left(\prod_{j=1}^{n}a_{\sigma(j)\,j}\right)f(e_{\sigma(1)}...e_{\sigma(n)})=\left(\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{j=1}^{n}a_{\sigma(j)\,j}\right)f(e_1...e_n)$$

$Mq\ \det_{\mathcal{B}_0}\in\mathcal{A}^n(E,\mathbb{K})\qquad\theta:(v_1...v_n)\mapsto\prod_{j=1}^{n}a_{\sigma(j)\,j}=\prod_{j=1}^{n}\varphi_{\sigma(j)}(v_j)$ $n-$lin d'après l'exemple fondamental

$+\ \tau\in\mathfrak{S}_n,\tau\bullet\det_{\mathcal{B}_0}\Rightarrow$ avec le fait que σ et τ sont bij, on arrive à ce qu'on veut

Pour toute base $\mathcal{B}_0$ de E, $\det_{\mathcal{B}_0}\in\mathcal{A}^n(E,\mathbb{K})\quad\det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}_0)=1$

$\mathcal{B}_0$ base de $E, f\in\mathcal{A}^n(E,\mathbb{K})\qquad f=f(e_1...e_n)\det_{\mathcal{B}_0}=f(\mathcal{B}_0)\det_{\mathcal{B}_0}$

$\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_0$ bases de $E\qquad\det_{\mathcal{B}}=\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_0)\cdot\det_{\mathcal{B}_0}$

$\mathcal{B}_0$ base de $E\quad\mathcal{F}=(v_1...v_n)$ famille de E

$\det_{\mathcal{B}_0}(v_1...v_n)=0\ ssi\ \mathcal{F}=(v_1...v_n)$ est liée

$\det_{B_0}\neq0\ ssi\ \mathcal{F}=(v_1...v_n)$ est une base

Preuve : Supp $\mathcal{F}$ liée : $v_k=\sum_{j\neq k}\alpha_j v_j$ On dvp par n-lin., on trouve =0 par antisym

$$\mathcal{B}=(e_1...e_n)\qquad(v_j)_{j\in[\![1,n]\!]}\in E^n, v_j=\sum_{i=1}^{n}a_{i\,j}e_i\qquad\text{On note }\det_{\mathcal{B}_0}=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

II. Déterminants de matrice et d'endomorphisme

$$A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\qquad A=(a_{i\,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}\qquad\det(A)=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{j=1}^{n}a_{\sigma(j)\,j}$$

$\varphi\in\mathcal{L}(E)\qquad\mathcal{B}_0=(e_1...e_n)$ base de $E\qquad\det_{\mathcal{B}_0}(\varphi)=\det_{\mathcal{B}_0}(\varphi(e_1)...\varphi(e_n))$

$\mathcal{B}_0$ base de E de dim $n\qquad A=\mathcal{M}at_{\mathcal{B}_0}(v_1...v_n)\Rightarrow\det(A)=\det_{\mathcal{B}_0}(v_1...v_n)$

$A=\mathcal{M}at_{\mathcal{B}_0}(\varphi)\Rightarrow\det(A)=\det_{\mathcal{B}_0}(\varphi)$

$E\ \mathbb{K}-ev$ de dim $n\qquad f\in\mathcal{L}(E)\qquad\det_{\mathcal{B}}(f)$ dans une base $\mathcal{B}$ ne dépend pas de la base choisie.

On le note $\det(f)$

Preuve : Deux bases, $\det_{\mathcal{B}}(f)=\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_0)\cdot\det_{\mathcal{B}_0}(f)\qquad\varphi\begin{cases}E^n&\to\mathbb{K}\\(v_1...v_n)&\mapsto\det_{\mathcal{B}_0}(f(v_1)...f(v_n))\end{cases}$ n lin, alter

$\varphi=\varphi(\mathcal{B}_0)\cdot\det_{\mathcal{B}_0}\qquad\det_{\mathcal{B}}(f)=\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_0)\cdot\varphi(\mathcal{B})=\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_0)\cdot\det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B})\cdot\varphi(e_1...e_n)=\det_{\mathcal{B}_0}(f)$

Deux matrices semblables ont le même déterminant

$\det(f\circ g)=\det(f)\times\det(g)$ $\qquad\qquad$ $\det(AB)=\det(A)\times\det(B)$

Preuve : Soit un des deux n'est pas bijectif → 0, soit les deux sont bijectifs → base sur base

$A\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible *ssi* $\det(A)\neq 0$ $\qquad$ $\det_{\backslash Gl_n(\mathbb{K})}$ est un morphisme de groupes : $\det(A^{-1})=\dfrac{1}{\det A}$

$\det(I_n)=1$ $\qquad\qquad$ $\det(diag(\alpha_1...\alpha_n))=\prod_{j=1}^{n}\alpha_j$

III. Résultats utiles pour le calcul de déterminants

$A=(C_1...C_n)$ Opérations usuelles :

- $C_i\leftrightarrow C_j\,(i\neq j)$ $\qquad$ $\det(C_1...\underset{i^{ème}\text{ pos}}{C_j}\ ...\ \underset{j^{ème}\text{ pos}}{C_i}\ ...C_n)=-\det(A)$ $\qquad$ $(\varepsilon(\tau)=-1)$
- $C_i\leftarrow C_i+\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}\alpha_kC_k$ $\qquad$ $\det(C_1...C_i+\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}\alpha_kC_k...C_n)=d\ \ t(A)\quad e$ $\qquad$ (det n-lin et alterné)
- $C_i\leftarrow\alpha C_i$ $\qquad$ $\det(C_1...\alpha C_i...C_n)=\alpha\det(A)$ $\qquad$ $(n-lin)$

(Aussi valable pour les lignes)

- $\det(C_{\sigma(1)}...C_{\sigma(n)})=\varepsilon(\sigma)\det(A)$
- $\det({}^tA)=\det(A)$

Preuve : $d\ \ t({}^tA)=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{j=1}^{n}a_{j\,\sigma(j)}=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{j=1}^{n}a_{\sigma^{-1}(\sigma(j))\sigma(j)}=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{k=1}^{n}a_{\sigma^{-1}(k)k}+bij$

$A\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire : $\det(A)=\prod_{j=1}^{n}a_{j\,j}$ $\qquad\qquad$ (preuve : par l'absurde)

$$M=\begin{array}{c c} \left(\begin{array}{c|c} A & B\\ \hline 0 & C\end{array}\right) & \begin{array}{c} p\\ q\end{array}\\ \begin{array}{cc} p & q\end{array} & \end{array}\qquad \det(M)=\det(A)\times\det(C)$$

Preuve : Nécessairement, pour qu'il n'y ait pas de zéro, $\sigma_{\backslash[\![1,p]\!]}\in\mathfrak{S}_p$, donc $\sigma_{\backslash[\![p+1,n]\!]}$ bij aussi...

$$M=\begin{pmatrix} A_1 & \cdots & *\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & A_n\end{pmatrix}\qquad \det(M)=\prod_{j=1}^{n}\det(A_j)$$

$A\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ $\qquad$ On note $A_{i\,j}$ la matrice extraite de A en éliminant la i^e ligne et la j^e colonne.

$\det(A)=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{i\,j}\det(A_{i\,j})=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{i\,j}\det(A_{i\,j})$ $\qquad\qquad$ (si on fixe $i\in\mathbb{N}_n$ ou $j\in\mathbb{N}_n$)

Preuve : Utiliser $n-lin$ pour développer par rapport à chaque E_i de la colonne j

Effacer toute la ligne du E_i correspondant. Permuter lignes et colonnes : $(-1)^{i+j}$

Quand une ligne ou colonne a beaucoup de 0, on développe par rapport à cette ligne / colonne

On appelle comatrice de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : com(A) = ((-1)^{i+j} \det(A_{i\,j}))_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$

${}^t(com(A)) \times A = A \times ({}^t com(A)) = (\det(A)) \times I_n$

Preuve : Diagonale : $\sum_{i=1}^{n} ({}^t com(A))_{j\,i}\, a_{i\,j} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+i} \det(A_{i\,j}) a_{i\,j} = \det A$ Sinon, 0 par antisym

$A \in Gl_n(\mathbb{K}) \Rightarrow A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} ({}^t com(A))$

$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$

Matrice de permutation : $\sigma \in \mathfrak{S}_n \quad P_\sigma = (\delta_{\sigma(j)\,i})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \quad \det(P_\sigma) = \varepsilon(\sigma)$

Déterminant de *Van der Monde* : $VdM(x_1 \ldots x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{j<k} (x_k - x_j)$

Preuve : On en fait un polynôme en mettant des X dans la dernière ligne, nécessairement les x_j sont racines…

$\mathrm{rg}(A) = 1$ *ssi* les colonnes sont toutes colinéaires

$I \subset [\![1,n]\!], J \subset [\![1,n]\!]$ Matrice extraite de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $A_{I\,J}$:

matrice obtenue en conservant les lignes de I et colonnes de J

$\mathrm{rg}(A)$ est la taille du plus grand déterminant extrait non nul

$\mathbb{K} \subset \mathbb{L} \quad (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ A est semblable à B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{L}) \Rightarrow A$ est semblable à B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

IV. Polynômes caractéristiques

La suite est au programme de spé

Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on définit $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$

P_A est de degré n, a pour coefficient dominant $(-1)^n$, $P_A(0) = \det(A)$, son terme en X^{n-1} est $(-1)^{n+1}\,\mathrm{tr}(A)$

Les valeurs propres de A sont les racines du poynôme caractérique : λ est valeur propre de $A \Leftrightarrow P_A(\lambda) = 0$

$A = \mathcal{M}at(f_A)$ est diagonalisable *ssi* $A = Q\Delta Q^{-1}$ où Δ est diag $\Rightarrow A - \lambda I_n = Q(\Delta - \lambda I_n)Q^{-1} \Rightarrow P_A = P_\Delta$

Si A est diagonalisable, $P_A = P_\Delta = \prod_{j=1}^{n} (\mu_j - X) = \prod_{j=1}^{p} (\alpha_j - X)^{k_j}$

$\dim(E_{\alpha_j}) = mult_{P_\Delta}(\alpha_j)$ où α_j valeur propre et E_{α_j} espace propre associé

$\varphi \in \mathscr{L}(E)$ a_j valeur propre $E_{\alpha_j} = \ker(\varphi - \alpha_j Id)$ Les (E_{α_j}) sont en somme directe

Preuve : $v \in E_{\alpha_k} \cap (\sum_{j\neq k} E_{\alpha_j}), v = \sum_{j\neq k} v_j = -v_k,\ w = \sum_{j=1}^{n} v_j = 0_E \Rightarrow \varphi^l(w) = 0_E = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j{}^l v_j\ \ VdM \neq 0 \Rightarrow v = 0_E$

$\bigoplus_{j=1}^{p} E_{\alpha_j} = E\ ssi\ \varphi$ est diagonalisable

Matrice compagnon : $(a_0 \ldots a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$ $P_A = (-1)^n (X^n - \sum_{j=0}^{n-1} a_j X^j)$

$\varphi \in \mathscr{L}(E)$ Si φ a un vecteur totalisateur w alors $\mathscr{B} = (w, \varphi(w) \ldots \varphi^{n-1}(w))$ est base de E

$f \in \mathscr{L}(E)$ Si $P(f) = 0_{\mathscr{L}(E)}$, toute valeur propre de f est nécessairement racine de P