Chap 21 : Intégrales sur un segment d'une fonction d'une variable réelle

I. Fonctions continues par morceaux

Dans toute cette partie, $(a,b)\in\mathbb{R}^2, a<b, I=[a,b]$

Dans toute cette partie, $(a,b)\in\mathbb{R}^2, a<b, I=[a,b]$

Une subdivision de I est de la forme $\sigma=(a_j)_{j\in[\![0,n]\!]}$ tel que $a=a_0<a_1<\ldots<a_{n-1}<a_n=b$

$\sigma=(a_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ et $\tau=(b_j)_{j\in[\![0,p]\!]}$ deux subdivisions de I

– On dit que σ est plus fine que τ si : $\{b_j, j\in[\![0,p]\!]\}\subset\{a_k, k\in[\![0,n]\!]\}$

– $\tau\vee\sigma$ est la subdivision obtenue en réordonnant $\{a_k, k\in[\![0,n]\!]\}\cup\{b_j, j\in[\![0,p]\!]\}$

(Si σ plus fine que τ, $\tau\vee\sigma=\sigma$ $\qquad$ $\tau\vee\sigma$ tjs plus fine que σ et τ)

Le pas de $\sigma=(a_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est $\delta(\sigma)=\max\limits_{j\in[\![0,n-1]\!]}(a_{j+1}-a_j)$

Une fonction $\varphi\in\mathfrak{F}([a,b],\mathbb{R})$ est dite en escalier sur $[a,b]$ s'il existe une subdivision $\sigma=(a_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ de I

tq $\forall j\in[\![0,n-1]\!], \varphi_{\backslash]a_j,a_{j+1}[}=\lambda_j$ est constante $\qquad$ $\varphi=\sum\limits_{j=0}^{n-1}\lambda_j\chi_{]a_j,a_{j+1}[}+\sum\limits_{k=0}^{n}\varphi(a_k)\chi_{\{a_k\}}$

$\varepsilon([a,b],\mathbb{R})=\{$fonctions en escalier sur $[a,b]\}$ est une sous algèbre de $\mathfrak{F}([a,b],\mathbb{R})$

Une fonction $f\in\mathfrak{F}([a,b],\mathbb{R})$ est continue par morceaux sur $[a,b]$ s'il existe une subdivision $\sigma=(a_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ de I

tq $\forall j\in[\![0,n-1]\!], \begin{cases} f_{\backslash]a_j,a_{j+1}[} \text{ est continue} \\ f \text{ admet une limite finie en } a_j^{\,+} \text{ et } a_{j+1}^{\,-}\end{cases}$

$\mathcal{C}^\circ pm([a,b],\mathbb{R})=\{$fonctions continues par morceaux sur $[a,b]\}$ est une sous algèbre de $\mathfrak{F}([a,b],\mathbb{R})$

On dit que σ est une subdivision subordonnée à $\varphi\,/\,f$

$\varepsilon([a,b],\mathbb{R})\subset\mathcal{C}^\circ pm([a,b],\mathbb{R})$ $\qquad$ $\mathcal{C}^\circ([a,b],\mathbb{R})\subset\mathcal{C}^\circ pm([a,b],\mathbb{R})$

$f\in\mathcal{C}^\circ pm([a,b],\mathbb{R})$ $\quad$ $\forall\varepsilon>0, \exists(\varphi,\psi)\in\varepsilon([a,b],\mathbb{R})^2$ tq $\begin{cases}\varphi\le f\le\psi \\ 0\le\psi-\varphi\le\varepsilon\end{cases}$ sur $[a,b]$

Preuve : D'abord pour $f\in\mathcal{C}^\circ([a,b],\mathbb{R})$: *Heine* : f uni. continue $\Rightarrow\delta_0>0, \forall\,|x-y|\le\delta_0\Rightarrow|f(x)-g(x)|<\varepsilon$

σ de pas $\delta\le\delta_0$ $\qquad$ $f_{\backslash[a_j,a_{j+1}]}$ bornée et atteint ses bornes $\Rightarrow\lambda_j=\max\limits_{[a_j,a_{j+1}]}f$ $\qquad$ $\mu_j=\min$

$\varphi=\sum\limits_{j=0}^{n-1}\lambda_j\chi_{\backslash[a_j,a_{j+1}[}+f(a_n)\chi_{\{a_n\}}$ Idem ψ avec μ_j … $\varphi\le f\le\psi$ … $0\le\psi(x)-\varphi(x)=|f(x_j)-f(y_j)|\le\varepsilon$

Cas général : on prolonge $f_{\backslash]b_k,b_{k+1}[}$ sur $[b_k,b_{k+1}]$ par $\mathcal{C}^\circ$. On traite ces parties comme $\upuparrows$ et on les réunit

II. Définition de l'intégrale sur un segment

$\varphi \in \varepsilon([a,b],\mathbb{R}), \sigma = (a_j)_{j\in[\![0,n]\!]}$ subdivision subordonnée. $\varphi = \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j \chi_{]a_j,a_{j+1}[} + \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \chi_{\{a_k\}}$

La quantité $\sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j (a_{j+1} - a_j)$ ne dépend pas de la subdivision choisie.

Elle est appelée intégrale de φ sur le segment $[a,b]$ et notée $\int_{[a,b]} \varphi$

Preuve : mq rajouter un c au milieu de la subdivision ne change rien + rec rapide : $I_\sigma(\varphi) = I_{\sigma\vee\tau}(\varphi) = I_\tau(\varphi)$

$\begin{cases} \varepsilon([a,b],\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ \varphi \mapsto \int_{[a,b]} \varphi \end{cases}$ est linéaire

Positivité de l'intégrale : $\forall \varphi \in \varepsilon([a,b],\mathbb{R})$, si $\varphi \geq 0$ sur I, alors $\int_{[a,b]} \varphi \geq 0$

Croissance de l'intégrale : $\forall (\varphi,\psi) \in \varepsilon([a,b],\mathbb{R})^2$, si $\psi \geq \varphi$ sur I, alors $\int_{[a,b]} \psi \geq \int_{[a,b]} \varphi$

Chasles : $\varphi \in \varepsilon([a,b],\mathbb{R}), c \in]a,b[\Rightarrow \varphi_{\backslash[a,c]} \in \varepsilon([a,c],\mathbb{R}), \varphi_{\backslash[c,b]} \in \varepsilon([c,b],\mathbb{R})$ $\qquad \int_{[a,b]} \varphi = \int_{[a,c]} \varphi + \int_{[c,b]} \varphi$

L'intégrale est l'aire algébrique comprise entre la courbe et l'axe des abscisses entre $(x=a)$ et $(x=b)$

Changer la valeur de φ en un nombre fini de points n'affecte pas $\int_{[a,b]} \varphi$

Si φ constante égale à λ sur I, $\int_{[a,b]} \varphi = \lambda(b-a)$

$f \in \mathcal{C}^\circ pm([a,b],\mathbb{R}) \qquad \mathcal{I}_f = \left\{ \int_{[a,b]} \varphi, \varphi \in \varepsilon([a,b],\mathbb{R}), \varphi \leq f \right\} \qquad \mathcal{S}_f = \left\{ \int_{[a,b]} \psi, \psi \in \varepsilon([a,b],\mathbb{R}), f \leq \psi \right\}$

$\mathcal{I}_f$ est majorée et $\mathcal{S}_f$ est minorée $\qquad \sup \mathcal{I}_f = \inf \mathcal{S}_f = \int_{[a,b]} f$ est l'intégrale de f sur $[a,b]$

Cette définition prolonge celle de $\int_{[a,b]}$ sur $\varepsilon([a,b],\mathbb{R})$

Preuve : Croissance de l'intégrale sur $\varepsilon(I,\mathbb{R})$ → maj/min. Densité de $\varepsilon(I,\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}^\circ pm(I,\mathbb{R})$, $\varepsilon_0 = \dfrac{\varepsilon}{b-a}$

$\begin{cases} \mathcal{C}^\circ pm(I,\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ f \mapsto \int_{[a,b]} f \end{cases}$ est linéaire

Positivité de l'intégrale : $\forall f \in \mathcal{C}^\circ pm([a,b],\mathbb{R})$, si $f \geq 0$ sur I, alors $\int_{[a,b]} f \geq 0$

Croissance de l'intégrale : $\forall (f,g) \in \mathcal{C}^\circ pm([a,b],\mathbb{R})^2$, si $g \geq f$ sur I, alors $\int_{[a,b]} g \geq \int_{[a,b]} f$

Chasles $f \in \mathcal{C}^\circ pm([a,b],\mathbb{R}), c \in]a,b[\quad \int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$

Preuves : Encadrer avec φ et ψ d'une part $f \,/\, g$..., d'autre part $\lambda f \,/\, (f+g)$ + linéarité dans $\varepsilon(I,\mathbb{R})$

$f \in \mathcal{C}^\circ pm([a,b],\mathbb{R}) \qquad M = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \qquad g \in \mathcal{C}^\circ pm([a,b],\mathbb{R})$

$\left| \int_{[a,b]} f \right| \leq M|b-a| \qquad \left| \int_{[a,b]} f \right| \leq \int_{[a,b]} |f| \qquad \left| \int_{[a,b]} fg \right| \leq M \int_{[a,b]} |g|$ (Inégalités de la moyenne)

/!\ En général, on n'a pas $\left|\int_{[a,b]} fg\right| \cancel{\leq} M \left|\int_{[a,b]} g\right|$ /!\

$f \in \mathcal{C}^\circ pm(I,\mathbb{R}), \forall (c,d) \in I^2$ on définit $\int_c^d f(t)dt = \begin{cases} \int_{[c,d]} f \text{ si } c<d \\ -\int_{[d,c]} f \text{ si } d<c \\ 0 \text{ si } d=c \end{cases}$

$\begin{cases} \mathcal{C}^\circ pm(I,\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ f \mapsto \int_c^d f(t)dt \end{cases}$ est linéaire. On vérifie Chasles : $\forall (\alpha,\beta,\gamma) \in I^3, \int_\alpha^\gamma f(t)dt = \int_\alpha^\beta f(t)dt + \int_\beta^\gamma f(t)dt$

/!\ La positivité et la croissance ne sont vraies que si $c<d$ /!\

III. Sommes de Riemann

$f \in \mathcal{C}^\circ pm(I,\mathbb{R}). \sigma = (a_j)_{j\in[\![0,n]\!]}$ une subdivision adaptée. $\forall j \in [\![0,n-1]\!]$, on prend $\xi_j \in [a_j, a_{j+1}]$. $\xi = (\xi_j)_{j\in[\![0,n-1]\!]}$

$$S(f,\sigma,\xi) = \sum_{j=0}^{n-1} (a_{j+1}-a_j) f(\xi_j)$$

Théorème de convergence : $S(f,\sigma,\xi) \xrightarrow[\delta(\sigma)\to 0]{} \int_{[a,b]} f$

Preuve : Si $f \in \mathcal{C}^\circ([a,b],\mathbb{R}), Heine : U.C^\circ \Rightarrow \eta > 0$ tq $|x-y| \leq \eta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon_0 = \dfrac{\varepsilon}{b-a}$

$$S(f,\sigma,\xi) - \int_a^b f = \sum_{j=0}^{n-1} (a_{j+1}-a_j) f(\xi_j) - \int_{[a,b\}} f = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{a_j}^{a_{j+1}} (f(\xi_j) - f(t))d \qquad |t-\xi_j| \leq |a_{j+1}-a_j| \leq \eta$$

$$\Rightarrow \left| S(f,\sigma,\xi) - \int_a^b f \right| \leq \sum_{j=0}^{n-1} \int_{a_j}^{a_{j+1}} |f(\xi_j) - f(t)|\, dt \leq \varepsilon_0 \sum_{j=0}^{n-1} (a_{j+1}-a_j) = \varepsilon$$

(HP) pour les $\mathcal{C}^\circ pm$, on partage la somme entre les parties continues et les parties où ξ_j est pt de discontinuité (nb fini). On les majore par le sup de f, négligeable quand $\delta \to 0$

Subdivisions régulières : $\dfrac{b-a}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(a + j\dfrac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b f(t)dt$

$\dfrac{b-a}{n} \sum_{j=1}^{n} f\left(a + j\dfrac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b f(t)dt \qquad \dfrac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(\dfrac{j}{n}\right) \to \int_0^1 f(t)dt$

Inégalité de Cauchy-Schwartz : $(f,g) \in \mathcal{C}^\circ pm([a,b],\mathbb{R})^2$

$\left|\int_a^b f(t)g(t)dt\right| \leq \left(\int_a^b f^2(t)dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b g^2(t)dt\right)^{\frac{1}{2}}$ Pour les fcts continues, on a égalité *ssi* $f = \lambda g$

Preuve : $P(\lambda) = \int_a^b (f(t) - \lambda g(t))^2 dt \qquad \forall \lambda, P(\lambda) \geq 0$ On dvp P(λ) en polynôme de $\Delta \leq 0 \Rightarrow$ CS

$f \in \underline{\mathcal{C}^\circ}([a,b],\mathbb{R}) \quad \begin{cases} f \geq 0 \text{ sur } [a,b] \\ \int_a^b f(t)dt \geq 0 \end{cases}$ alors $f = 0_{\mathcal{F}(I,\mathbb{R})}$ (preuve : contraposée + voisinage)

IV. Théorème fondamental de l'analyse et applications

$f \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R}) \quad x_0 \in I \quad F\begin{cases} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)dt \end{cases}$ $\quad F$ est dérivable sur I et $F' = f$

Preuve : $F(x+h)-F(x) = \int_x^{x+h} f(t)dt \Rightarrow |F(x+h)-F(x)-hf(x)| \le \left|\int_x^{x+h} |f(t)-f(x)|dt\right|$

$\varepsilon > 0, \delta > 0 \qquad |t-x| \le |h| \le \delta \Rightarrow |f(t)-f(x)| \le \varepsilon \Rightarrow |F(x+h)-F(x)-hf(x)| \le |h|\varepsilon \Rightarrow DL$ à l'ordre 1

Pour $f \in \mathcal{C}^\circ pm(I,\mathbb{R})$, on montre de la même façon que f est F est dérivable hors des points de discontinuité.

En revanche, Si $f \in \mathcal{C}^\circ pm(I,\mathbb{R})$, alors $F \in \mathcal{C}^\circ(I,\mathbb{R})$

$(f,F) \in \mathfrak{F}(I,\mathbb{R})^2$ On dit que F est une primitive de f sur I si $F \in \mathfrak{D}^1(I,\mathbb{R})$ et $F' = f$

Si F_0 est une primitive de f, alors $\{F$ primitive de $f\} = \{F_0 + k, k \in \mathbb{R}\}$

D'après le théorème de Darboux, toutes les fonctions n'admettent pas de primitives.

Tout fonction continue sur I admet une primitive sur I.

$\forall x_0 \in I, F : x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)dt$ est l'unique primitive de f s'annulant en 0

$f \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R}) \quad F$ primitive de f sur I. $\qquad \int_a^b f(t)dt = F(b)-F(a) = [F(t)]_{t=a}^{t=b}$

$(f,g) \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})^2 \qquad \int_a^b f'(t)g(t)dt = [f(t)g(t)]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b f(t)g'(t)dt$

$f \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R}) \quad J$ intervalle de $\mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{C}^1(J,\mathbb{R}), \varphi(J) \subset I \qquad (c,d) \in J^2$

$$\int_c^d \underbrace{f \circ \varphi(u)}_{f(t)} \times \underbrace{\varphi'(u)du}_{dt} = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(t)dt$$

f paire $\Rightarrow \int_{-a}^{0} f(t)dt = \int_0^a f(t)dt \qquad \int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt$

f impaire $\Rightarrow \int_{-a}^{0} f(t)dt = -\int_0^a f(t)dt \qquad \int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$

$\int_{a-h}^{b-h} f(x+h)dx = \int_a^b f(x)dx$

f $T-$périodique : $\int_{a+T}^{b+T} f(t)dt = \int_a^b f(t)dt \qquad \int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$

Valeur moyenne : $m = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \le \sup\limits_{[a,b]} |f|$

$G_1 : x \mapsto \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)dt \qquad G_1'(x) = \varphi'(x) \times f \circ \varphi(x) - \psi'(x) \times f \circ \psi(x)$

Formule de Taylor avec reste intégral :

$$f \in \mathcal{C}^{n+1}(I,\mathbb{R}), \forall (x,a) \in I^2, f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$$

On écrit aussi $\int_a^x \dfrac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt = (x-a)^{n+1}\int_0^1 \dfrac{(1-s)^n}{n!} f^{(n+1)}((1-s)a+sx)ds$

V. Brève extension aux fonctions à valeurs complexes

On étend la définition des fonctions continues par morceaux pour les fonctions à valeurs complexes

$f \in \mathcal{C}^{\circ}pm(I,\mathbb{C})$ $\quad f_1 = \mathrm{Re}(f)$ $\quad f_2 = \mathrm{Im}(f)$ $\quad \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f_1(t)dt + i\int_a^b f_2(t)dt$

On montre la linéarité, Chasles, les inégalités (sur le module), le lien avec les primitives, l'intégration par parties, la formule de Taylor avec reste intégral, et le changement de variable (REELLE).
On n'a pas l'égalité des accroissements finis, mais on a l'inégalité des AF :

Inégalité des accroissements finis : $f \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{C})$ $\quad \forall (a,b)\in I^2, \quad |f(b)-f(a)| \leq \sup\limits_{\substack{[a,b] \\ ou[b,a]}} |f'||b-a|$

Inégalité de Taylor-Lagrange : $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I,\mathbb{C})$ $\quad \forall (a,b)\in I^2,$ $\quad \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right| \leq \sup\limits_{\substack{[a,b] \\ ou[b,a]}} |f^{(n+1)}| \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$