

# Chap 19 : Réduction des endomorphismes

Position du problème :  $E$   $\mathbb{K}$ -ev de dim finie,  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

Trouver les bases de  $E$  dans lesquelles la matrice de  $u$  prend une forme simple (diagonale, triangulaire...)

## I. Stabilité, éléments propres

$E$   $\mathbb{K}$ -ev,  $u \in \mathcal{L}(E)$

(pour l'X : "invariant" = "stable" parfois)

Un sev  $F$  de  $E$  est dit stable lorsque  $u(F) \subset F$ , invariant lorsque  $u(F) = F$ , fixe lorsque  $(\forall x \in F, u(x) = x)$

$v \in \mathcal{L}(E)$   $u \circ v = v \circ u$  (càd  $[u, v] = 0$ )  $\Rightarrow \ker v$  et  $\text{Im } v$  sont stables par  $u$

Supp  $F$  de dim finie stable par  $u$ . Si  $\ker u \cap F = \{0\}, u(F) = F$  et  $u|_F \in GL(F)$

$(e_i)_{i \in 1, n}$  base de  $E$  tq  $(e_1 \dots e_p)$  base de  $F, \left( \forall u \in \mathcal{L}(E), F \text{ stable par } u \Leftrightarrow \mathcal{M}_{(e)}(u) = \left( \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array} \right), A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \right)$

Calculs :  $[u^k]_{(e)} = \left( \begin{array}{c|c} A^k & * \\ \hline 0 & C^k \end{array} \right) \parallel \text{ Si } [u]_{(e)} = \left( \begin{array}{c|c} \lambda I & B \\ \hline 0 & \lambda I \end{array} \right), [u^k]_{(e)} = \left( \begin{array}{c|c} \lambda^k I & k\lambda^{k-1}B \\ \hline 0 & \lambda^k I \end{array} \right)$

$E = \bigoplus_{i=1}^p F_i, (e_i)$  base de  $F_i$  et  $(e) = \bigcup_{i \in 1, p} (e)_i, \left( \text{chaque } F_i \text{ est stable par } u \Leftrightarrow [u]_{(e)} = \left( \begin{array}{ccc|c} A_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & & \\ \hline 0 & & & A_p \end{array} \right) \text{ où } A_i \in \mathcal{M}_{\dim F_i}(\mathbb{K}) \right)$

Si  $F$  et  $G$  sont stables par  $u, F \cap G$  et  $F + G$  sont stables par  $u$

$u \in \mathcal{L}(E)$  est une homothétie ssi tous les sev de  $E$  sont stables par  $u$  ( $\leftarrow$  Schur, rec)

$\lambda \in \mathbb{K}$  est valeur propre (vp) de  $u$  lorsque :  $\exists x \in E \setminus \{0\}, u(x) = \lambda x, \text{ ie } \ker(u - \lambda Id) \neq \{0\}$

On dit alors que  $x$  est un vecteur propre attaché à  $\lambda. (\lambda \text{ unique si } x \neq 0)$

Si  $\lambda$  est valeur propre,  $E_{\lambda, u} = \ker(u - \lambda Id_E)$  est l'espace propre attaché à  $\lambda$

$x$  vecteur propre de  $u \Leftrightarrow x \neq 0$  et  $\mathbb{K}x$  stable par  $u$

$\lambda$  vp de  $u \Rightarrow u|_{E_{\lambda, u}} = \lambda Id_{E_{\lambda, u}}$  commute avec tous les endomorphismes de  $E_{\lambda, u}$

Si  $E$  est un  $\mathbb{C}$ -ev de dim finie,  $u$  possède au moins une valeur propre (det  $\rightarrow$  polynôme)

$\lambda_1 \dots \lambda_p$  valeurs propres (2 à 2 distinctes) de  $u \in \mathcal{L}(E), x_1 \dots x_p$  vecteurs propres associés  $\Rightarrow (x_1 \dots x_p)$  est libre

Rec + composition par  $u : \sum \alpha_i x_i = 0, \sum \alpha_i \lambda_i x_i = 0 \Rightarrow \sum_{i \neq p} \alpha_i (\lambda_i - \lambda_p) x_i = 0$

Les  $(E_{\lambda_i, u})_{i \in 1, p}$  sont alors en somme directe

$u \in \mathcal{L}(E), a \in GL(E), \lambda$  vp de  $u \Rightarrow \lambda$  vp de  $a \circ u \circ a^{-1}$  et  $\ker(a \circ u \circ a^{-1} - \lambda Id) = a(\ker(u - \lambda Id))$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}, (E, \|\cdot\|)$   $\mathbb{K}$ -evn,  $u \in L(E)$   $\lambda$  vp de  $u \Rightarrow \lambda \leq \|u\|$

## II. //HP// Complément : spectre en dimension infinie

$(E, \|\cdot\|)$   $\mathbb{K}$ -evn,  $u \in \mathcal{L}_C(E)$  de norme  $\|u\|$   $\text{Spec}(u) = \{\lambda \in \mathbb{K} / u - \lambda Id_E \text{ ne possède pas d'inverse continu}\}$

$\lambda$  vp de  $u \Rightarrow \lambda \in \text{Spec}(u)$ , RECIPROQUE FAUSSE :  $u - \lambda Id$  peut être inj. non surj., ou bij d'inverse non  $\mathbb{C}^0$

### III. Endomorphismes et matrices diagonalisables

$E$  est de dimension finie

$u \in \mathcal{L}(E)$  est diagonalisable lorsque  $E$  est somme directe des espaces propres de  $u$

$\text{Spec}(u)$  est l'ensemble des valeurs propres de  $u$

$$\text{card}(\text{Spec}(u)) \leq \dim E$$

$u \in \mathcal{L}(E)$  On a équivalence entre : –  $u$  est diagonalisable –  $\sum_{\lambda \in \text{Spec}(u)} \dim E_{\lambda,u} = \dim E$

– Il existe une base  $(e)$  de  $E$  formée de vect. propres de  $u$  ( $\Leftrightarrow [u]_{(e)}$  est diagonale)

$$[u]_{(e)} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \lambda \text{ vp} \Rightarrow E_{\lambda,u} = \text{Vect}(e_i / \lambda_i = \lambda) \quad \ker u = \text{Vect}(e_i / u(e_i) = 0) \quad \text{Im } u = \text{Vect}(e_i / \lambda_i \neq 0)$$

Si  $u$  possède  $n = \dim E$  vp distinctes  $(\lambda_1 \dots \lambda_n)$ ,  $u$  est diagonalisable

$$u \in \mathcal{L}(E) \text{ diag. } \text{com}(u) = \ker[u, \bullet] \parallel v \in \text{com } u \Leftrightarrow \forall \lambda, v(E_{\lambda,u}) \subset E_{\lambda,u} \parallel \dim(\text{com } u) = \sum_{i=1}^p (\dim E_{\lambda_i,u})^2 \parallel n \text{ vp} \Rightarrow \text{com } u = \mathbb{K}[u]$$

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$   $A$  est diagonalisable s'il existe  $P \in GL_n(\mathbb{K})$  et  $\Delta$  diagonale tq  $P^{-1}AP = \Delta$

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  On a équivalence entre : –  $A$  est diagonalisable –  $f_A : \begin{cases} \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n \\ X \mapsto AX \end{cases}$  est diagonalisable

–  $(\exists \Leftrightarrow \forall) E \mathbb{K} - ev$  de dim finie  $n$ ,  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $(e)$  base de  $E$  tq  $[u]_{(e)} = A$  et  $u$  est diagonalisable

La propriété est invariante par similitude

### IV. Polynômes d'endomorphismes

$E \mathbb{K} - ev$ ,  $u \in \mathcal{L}(E)$

$$P = \sum_{k=0}^d a_k X^k \in \mathbb{K}[X] \quad \text{On pose } P(u) = \sum_{k=0}^d a_k u^k \quad (u^0 = Id_E, u^k = \underbrace{u \circ \dots \circ u}_{k \text{ fois}})$$

$$P(0) = a_0 Id \quad P(u)(0) = 0 \quad (PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$$

$\varphi_u \begin{cases} \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathcal{L}(E) \\ P \mapsto P(u) \end{cases}$  est un morphisme de  $\mathbb{K}$  – algèbres unitaire.

$I_u = \ker \varphi_u = \{p \in \mathbb{K}[X] / P(u) = 0\}$  est un idéal de  $\mathbb{K}[X]$

Lorsque  $E$  est de dimension finie,  $I_u \neq \{0\}$ .

$$\text{La fin : } n = \dim E \quad n^2 = \dim \mathcal{L}(E) \rightarrow (Id_E \dots u^{n^2}) \text{ est liée} \Rightarrow P \text{ tq } P(u) = 0$$

$I_u$  est l'idéal annulateur de  $u$ . Si  $I_u \neq \{0\}$ , son générateur normalisé est le polynôme minimal de  $u$ , noté  $\mu_u$

$P \in I_u \quad \forall \lambda \text{ vp de } u, P(\lambda) = 0 \quad \text{RECIPROQUE FAUSSE}$

$P \in \mathbb{K}[X], v \in \mathcal{L}(E) \text{ tq } [u, v] = 0 \Rightarrow v$  laisse stables  $\ker P(u)$  et  $\text{Im } P(u)$

## Chap 19 : Réduction des endomorphismes

Décomposition des noyaux (DDN)  $P_1 \dots P_r \in \mathbb{K}[X]$  2 à 2 premiers entre eux.

$$\forall u \in \mathcal{L}(E), \ker((P_1 \dots P_r)(u)) = \bigoplus_{i=1, r} \ker(P_i(u))$$

Rec + Bezout  $((UP)(u)(x) + (VQ)(u)(x) = x) \dots$

(VI)  $u \in \mathcal{L}(E)$   $u$  diagonalisable  $\Leftrightarrow \exists P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ , scindé à racines simples, tq  $P(u) = 0$

$$\Leftrightarrow P(X) = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i) \text{ avec } \lambda_i \text{ 2 à 2 } \neq + \text{ DDN } (X - \lambda_i \wedge X - \lambda_j = 1 \text{ Bezout}) \Rightarrow \text{DDN}$$

Si  $u$  est diagonalisable et  $F$  est stable par  $u$ , alors  $u|_F$  est diagonalisable

$u \in \mathcal{L}(E)$   $u$  diag  $\Leftrightarrow \exists (F_i)_{i \in 1, n}$  sev suppl. de  $E$  et  $\mu_1 \dots \mu_p \in \mathbb{K}$  tq  $u = \sum_{i=1}^p \mu_i \pi_i$ , avec  $\pi_i$  proj. sur  $F_i // \bigoplus_{j \neq i} F_j$

Calcul des  $\pi_i : u$  diag, annulée par  $P = \prod_{i=1}^r (X - \mu_i)$ , ( $\mu_i \neq \mu_j$ )

$L_j$  est  $j$ -ème interpolateur de Lagrange attaché à  $\mu_1 \dots \mu_r$

$$\Rightarrow \pi_j = L_j(u) \text{ est le proj de } E \text{ sur } F_j = \ker(u - \mu_j Id) // \bigoplus_{i \neq j} F_i \text{ et } u = \sum_{j=1}^r \mu_j \pi_j$$

Application : suites récurrentes linéaires à coefficients constants.

$$a_0 \dots a_p \in \mathbb{C}^n \quad \mathcal{E} = \{(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} / \forall n \geq 0, u_{n+p} = \sum_{k=0}^{p-1} a_k u_{n+k}\}$$

$R(X) = X^p - a_{p-1}X^{p-1} - \dots - a_0$  est son équation caractéristique,  $\lambda_1 \dots \lambda_r$  ses racines et  $\alpha_1 \dots \alpha_r$  leur multiplicité

Une base de  $\mathcal{E}$  est  $(n^k \lambda_i^n)_{i \in \{1, \dots, r\}, k \in \{0, \dots, \alpha_i - 1\}}$

## V. Polynôme caractéristique

$\mathbb{K}$  corps commutatif,  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $E$   $\mathbb{K}$ -ev de dim  $n$

$$u \in \mathcal{L}(E) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \text{ vp} \Leftrightarrow \det(u - \lambda Id_E) = 0$$

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  Le polynôme caractéristique de  $A$  est  $\chi_A(X) = \det(A - XI_n)$

$$\text{Si } A \text{ et } B \text{ sont semblables, } \chi_A = \chi_B \quad \chi_A(X) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n (A_{\sigma(i)i} - \sigma_{\sigma(i)i} X)$$

$u \in \mathcal{L}(E), (e)$  base de  $E$ . Le polynôme caractéristique  $\chi_u$  de  $u$  est celui de  $[u]_{(e)}$  : il ne dépend pas de  $(e)$

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \text{ vp de } u \Leftrightarrow \chi_u(\lambda) = 0$$

Ses coefficients sont :  $X^n \rightarrow (-1)^n$   $X^{n-1} \rightarrow (-1)^{n-1} \text{tr } A$   $X^0 \rightarrow \det(A)$

$${}^{(1)}n=2 \quad \chi_A(X) = X^2 - \text{tr}(A)X + \det A \quad n=3 \quad -X^3 + \text{tr}(A)X^2 - (\text{tr}(\text{com } A))X + \det A$$

${}^{(1)}$  Les coefficients de  $\chi_A$  sont des invariants de similitude

Spec dans  $\mathbb{K}$  : c'est la liste des racines de  $\chi_A$  dans  $\mathbb{K}$  avec multiplicité ( $\text{Spec}_{\mathbb{R}} A \neq \text{Spec}_{\mathbb{C}} A$ )

## Chap 19 : Réduction des endomorphismes

$u \in \mathcal{L}(E), \lambda$  vp de  $u$     Multiplicité géométrique de  $\lambda$  :  $\dim(\ker(u - \lambda Id_E))$   
 Multiplicité algébrique de  $\lambda$  : sa multiplicité en tant que racine de  $\chi_A$

Si  $\chi_A$  est scindé  $\chi_A = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ ,  $\sum_{i=1}^p \alpha_i \lambda_i = \text{tr } A$      $\prod_{i=1}^p \lambda_i^{\alpha_i} = \det A$

$u \in \mathcal{L}(E)$      $F$  sev de  $E$  stable par  $u$ ,  $v = u|_F$      $\Rightarrow \chi_v | \chi_u$   
 $\lambda$  vp de  $u$ ,  $\alpha_\lambda$  sa multiplicité algébrique,  $\beta_\lambda$  sa multiplicité géométrique :  $\alpha_\lambda \geq \beta_\lambda$   
 $u \in \mathcal{L}(E)$  tq  $\chi_u$  soit scindé sur  $\mathbb{K}$      $u$  diagonalisable  $\Leftrightarrow \forall \lambda$  vp de  $u, \alpha_\lambda = \beta_\lambda$

En pratique : On étudie  $AX = \lambda X$     Si  $\chi_A$  est scindé,  $A$  diag  $\Leftrightarrow \forall \lambda \in \text{Spec}(A), re(A - \lambda I_n) \leq n - \alpha$

Cayley-Hamilton :  $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \chi_A(A) = 0$

écriture  $(A - XI_n) = \sum X^k B_k, \chi_A(X) = \sum a_k X^k, (A - XI_n)(A - XI_n) = \chi_A(X)I_n$  + identification des  $X^k$

$\mu_A$  polynôme minimal annulateur de  $A$ .  $\mu_A | \chi_A \Rightarrow \deg \mu_A \leq n$

Si  $\chi_A = (-1)^n \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ , comme  $(X - \lambda_i)^{\alpha_i} \wedge (X - \lambda_j)^{\alpha_j} = 1, \chi_A(A) = 0, \mathbb{K}^n = \bigoplus_{i=1}^p \ker((A - \lambda_i I)^{\alpha_i})$

$\chi_A$  scindé  $\Rightarrow (A \text{ diag} \Leftrightarrow \forall \lambda \in \text{Spec}(A), \ker(A - \lambda I) = \ker(A - \lambda I)^2)$

$\Leftrightarrow \bigoplus_{i=1}^p \ker((A - \lambda_i I)^{\alpha_i}) = \bigoplus_{i=1}^p \ker(A - \lambda_i I) = \mathbb{K}^n$

## VI. Trigonalisation

$u \in \mathcal{L}(E)$  est trigonalisable s'il existe une base  $(e_1 \dots e_n)$  de  $E$  tq  $[u]_{(e)} = \begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est trigonalisable lorsque  $\exists P \in GL_n(\mathbb{K}), P^{-1}AP = T$  triangulaire supérieure

$u$  trig.  $\Leftrightarrow u(\text{Vect}(e_1 \dots e_k)) \subset \text{Vect}(e_1 \dots e_k)$

$u \in \mathcal{L}(E)$ . On a équivalence entre :  
 -  $u$  est trigonalisable  
 -  $\chi_u$  est scindé    -  $\exists P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$  scindé tel que  $P(u) = 0$

$3 \Rightarrow 1$ ) Rec  $P(u) = 0 \Rightarrow u$  possède une vp,  $H$  hyppl/  $\text{Im}(u - \lambda I) \subset H \Rightarrow$  stable par  $u, v = u|_H$  trigon.,  $e_n$  tq  $H \oplus \mathbb{K}e_n = E$

$u$  nilpotent  $\Rightarrow u$  trigonalisable

$u$  annulé par  $P$  scindé  $\Rightarrow \text{spec}(u) = (\lambda_1 \dots \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ , et si  $Q \in \mathbb{K}[X], \text{spec}(Q(u)) = (Q(\lambda_1) \dots Q(\lambda_n))$

## //HP// Compléments

### C-I. Méthodes usuelles en théorie de la réduction

Calcul de valeurs propres :

- Trouver  $u : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$  attaché à  $A$  à l'aide de  $P \mapsto P' + \text{Equa diff}$
- Relation de récurrence entre les coeff du système linéaire (si besoin,  $x_0 = 0, x_{n+1} = 0 \dots$ )

Si  $P^{-1}AP = \Delta$  diagonale, les colonnes de  $P$  sont les vecteurs propres de  $A$

Matrices cycliques :  $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & & \\ 0 & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad C^n = I_n \Rightarrow \text{Spec}(C) \subset \mathbb{U}_n$

$\dim E = n \geq 1, u \in \mathcal{L}(E)$  de rang 1 :  $u$  diag  $\Leftrightarrow \text{tr} u \neq 0$  ( $A = CL \Rightarrow LC = \text{tr} A, X^2 - X \text{tr} A$  annule  $A$ )

$E \mathbb{C}$ -ev,  $u$  diag  $\Leftrightarrow$  Tout sev stable par  $u$  possède un suppl. stable par  $u$

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), A^2$  diag.  $A$  diag  $\Leftrightarrow \ker A = \ker A^2$   $A$  diag nilpotente  $\Leftrightarrow A = 0$

$A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad \chi_{AB} = \chi_{BA} \quad (B \text{ inv ok}, B + I_n / p \rightarrow B, \text{ continuité des coefs})$

$(^1) A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \quad A$  nilpotent  $\Leftrightarrow \text{tr} A = \dots = \text{tr} A^n = 0$  (vp avec rep, trig,  $\sum P(\lambda_i) = 0$  abs avec  $P = X \prod_{i=2}^p (X - \lambda_i)$ )

Utile :  $- P(A) = 0$ , mq  $\det A > 0 \rightarrow$  Calcul des racines de  $P$ , vérifier l'absence de 0

$- M$  tq  $M^2 = A ? \rightarrow$  Soit on diagonalise, soit on utilise des polynômes interpolateurs

### C-II. Commutation et réduction simultanée

$u, v \in \mathcal{L}(E)$  sont codiagonalisables s'ils sont diag. dans une même base (cotrigonalisables  $\rightarrow$  analogue)

$E \mathbb{K}$ -ev,  $u, v \in \mathcal{L}(E)$  diagonalisables ( $u$  et  $v$  codiag  $\Leftrightarrow u \circ v = v \circ u$ )

$(u_i)_{i \in I}$  famille commutative (qcq) d'endomorphismes diag  $\Rightarrow (u_i)_{i \in I}$  est codiag (regarder  $E_{\lambda, u}$ )

$(u_i)_{i \in I}$  fam d'involutions de  $\mathbb{C}^m$  commutant 2 à 2  $\Rightarrow |I| \leq 2^m$  (atteint)

$\varphi: GL_n(\mathbb{C}) \rightarrow GL_m(\mathbb{C})$  isomorphisme de groupes  $\Rightarrow m = n$  (respecte les involutions  $\rightarrow$  cardinal)

$(u_1 \dots u_p)$  fam commutative d'éléments trig. de  $\mathcal{L}(E) \Rightarrow$  cotrigonalisables

### C-III. Espaces cycliques

$E \mathbb{K}$ -ev de dim finie  $n \geq 1, u \in \mathcal{L}(E)$

$x \in E$  L'espace cyclique attaché à  $x$  pour  $u$  est  $F_x = \text{Vect}(u^k(x))_{k \in \mathbb{N}}$

$F_x$  est le plus petit sev de  $E$  contenant  $x$  stable par  $u$

$$F_x = \{P(u) \cdot x \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$$

$x \neq 0, p = \min\{m \in \mathbb{N}^* \mid (x, \dots, u^m(x)) \text{ est liée}\} \Rightarrow (x, \dots, u^{p-1}(x))$  est une base de  $F_x$  (DE poly)

$$P(u) \cdot x = 0 \Leftrightarrow \mu_{u,x} \mid P$$

$E$  est dit cyclique lorsqu'il existe  $x \in E$  tel que  $F_x = E$

Ex:  $(^1)$  nilpotents d'ordre  $n$

$(^1) u \in \mathcal{L}(E)$  cyclique  $\Rightarrow \text{Com}(u) = \mathbb{K}[u]$

(on écrit  $v(a)$  sur la base  $(a \dots u^{n-1}(a)) \dots$ )

$P(X) = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \dots - a_1X - a_0$  (!\ signes), la matrice compagnon de  $P$  est  $C_P = \begin{pmatrix} 0 & & & a_0 \\ 1 & & & \vdots \\ & \ddots & & 0 \\ & & \ddots & a_{n-2} \\ & & & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$

$(^1) x \in E, F_x = \text{Vect}(\beta)$  où  $\beta = (x_1 \dots u^{d-1}(x))$  libre,  $\mu_{u,x} = X^d - a_{d-1}X^{d-1} - \dots - a_0 \quad v = u \Big|_{F_x}^{\Rightarrow} [v]_{(\beta)} = C_{\mu_{u,x}}$

## Chap 19 : Réduction des endomorphismes

Le polynôme caractéristique de  $C_p$  est  $(-1)^n P$ , et minimal est  $C_p$

$C_p$  diagonalisable  $\Leftrightarrow P$  scindé à racines simples

$P \in \mathbb{Z}[X]$  normalisé de racines complexes  $(\lambda_i)$   $\forall k \in \mathbb{N}^*, \exists Q \in \mathbb{Z}[X]$  normalisé tq ses racines sont  $(\lambda_i^k)$

### C-IV. Polynôme minimal

$\lambda \in \mathbb{K}$   $\lambda \in \text{Spec}(u) \Leftrightarrow \mu_u(\lambda) = 0$  (passer par polynômes)

$u$  diagonalisable  $\Leftrightarrow \mu_u$  scindé à racines simples

### C-V. Décomposition de Jordan-Dunford, espaces caractéristiques

Supposons  $(-1)^n \chi_u(X) = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ .  $F_{\lambda_i, u} = \ker(u - \lambda_i \text{Id})^{\alpha_i}$  est l'espace caractéristique attaché à la vp  $\lambda$

Si  $(-1)^n \chi_u(X) = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ ,  $E = \bigoplus_{i=1}^p \ker(u - \lambda_i \text{Id})^{\alpha_i} = \bigoplus_{i=1}^p F_{\lambda_i, u}$

Jordan-Dunford :  $u \in \mathcal{L}(E)$ , avec  $\chi_u$  scindé.  $\Rightarrow u = D + N$ , avec  $D$  diag,  $N$  nilpotente, et  $[D, N] = 0$

Une telle décomposition est unique

$\exists : \uparrow + \text{trig.} \Rightarrow N + D$ .  $\exists ! : D + N = \delta + \nu$   $\delta, \nu, N, D$  laissent stable  $F_{\lambda_i}$ , comm. avec  $D$  sur  $F_{\lambda_i} \Rightarrow N' - \nu' = \delta' - D'$

### C-VI. Réduction et topologie

Disque de Gershgorin :  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ,  $\forall i \in 1, n$ ,  $r_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \Rightarrow \text{Spec}(A) \subset \bigcup_{i=1}^n D(a_i, r_i)$

$N$  norme d'algèbre sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ,  $\lambda \in \text{Spec}(A) \Rightarrow |\lambda| \leq N(A)$

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ,  $\text{Spec} A = (\lambda_1 \dots \lambda_n)$ ,  $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists P \in GL_n(\mathbb{C})$  tq  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (a_{i,j}) \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$  avec ;  $\forall i < j, |a_{ij}| \leq \varepsilon$

L'ensemble  $\Omega$  des matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  ayant  $n$  vp distinctes est dense dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  ( $\lambda_k \leftarrow \lambda_k + 2^{-k}$ )

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \Rightarrow \dim \text{Com}(A) \geq n$  ||  $\nexists N$  norme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  ( $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ) inv par similitude (densité de  $GL_n(\mathbb{K})$ )

$F$  fermé de  $\mathbb{C}$ ,  $X = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) / \text{Spec}(A) \subset F\}$  est fermé dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  (suite  $A_p, |\chi_{A_p}(z)| > d(z, F)^n$ )

Utile :-  $(\cdot)$  mettre en évidence un sev stable où faire des calculs simples (dim 2...) (pour l'absurde)

-  $(\cdot) A_p \rightarrow A \Rightarrow \forall z, \chi_{A_p}(z) \rightarrow \chi_A(z) + \text{distance}$

### C-VII. La réduction en général

Décomposition de Jordan :  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $\chi_A$  scindé  $\Rightarrow A$  semblable à  $\begin{pmatrix} J_{n_1 \lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{n_2 \lambda_2} \end{pmatrix}$  où  $J_{m \lambda} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  Frobenius :  $A$  est semblable à  $\begin{pmatrix} C_{P_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & C_{P_k} \end{pmatrix}$  où  $C_P$  matrice compagnon de  $P$  et  $P_1 | P_2 | \dots | P_k$